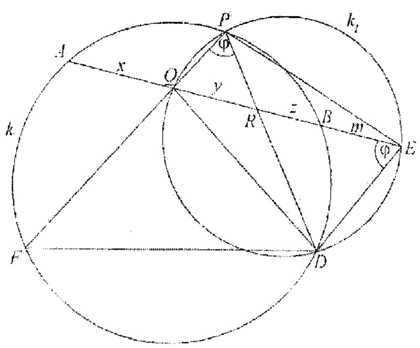
Алија Муминагић

О ЈЕДНОМ ТАКМИЧАРСКОМ ЗАДАТКУ

На државном такмичењу ученика средњих школа у Босни и Херцеговини (Мостар, 15. и 16. мај 2010) један од задатака био је сљедећи

Задатак. Нека су AB и FD двије тетиве круга k (без заједничких тачака), а тачка P је на луку AB на коме се налазе тачке F и D. Праве PF и PD сијеку тетиву AB у тачкама Q и R. Доказати да израз $\dfrac{\overline{AQ}\cdot\overline{RB}}{\overline{QR}}$ има константну вриједност док се тачка P креће луком AB.

Ријешење. Нека кружница k_1 описана око троугла PQD сијече продужетак тетиве AB у тачки E. Сада је $\varphi = \angle FPD = \angle QPD$ (тетива FD је константне дужине). Четвороугао $PQDE$ је тетиван (уписан у круг k_1) па је $\angle QED = \angle QPD = \varphi$ (периферијски углови над истим луком QD), сл. 1. Дакле, за све положаје тачке $P \in k$, $\angle AED$ је константан, тј. кружница описана око троугла PQD увијек сијече продужетак тетиве AB у тачки E, без обзира на положај тачке P.



Слика 1

Одавде слиједи да је $\overline{BE} = m$, тј. константне дужине. На основу теореме о потенцији тачке R у односу на кружнице k и k_1, имамо

$$\overline{AR}\cdot\overline{RB} = \overline{PR}\cdot\overline{RD} = \overline{QR}\cdot\overline{RE}. \tag{1}$$

Означимо ли да је $\overline{AQ} = x$, $\overline{QR} = y$, $\overline{RB} = z$ и $\overline{BE} = m$, добијамо из (1) да је $(x+y)z = y(z+m)$, а одавде

$$\frac{xz}{y} = \frac{\overline{AQ}\cdot\overline{RB}}{\overline{QR}} = m\ (= \mathrm{const}),$$

што је и требало доказати.

Овај задатак је интересантан сам по себи, а ми га дајемо због тога што нам може послужити као лема за доказ познате популарне *теореме о лептиру*, која гласи:

Нека је дата тетива AB круга и њено средиште M. Кроз тачку M су повучене двије произвољне тетиве EF и CD. Тетиве CF и ED сијеку AB у тачкама Q и R. Тада је тачка M уједно и средиште дужи QR, тј. $\overline{MQ} = \overline{MR}$.

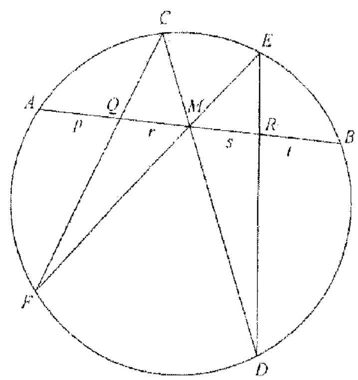
Доказ. Према претходном задатку је

$$\frac{\overline{AQ} \cdot \overline{MB}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{BR} \cdot \overline{AM}}{\overline{RM}},$$

односно, уз ознаке $\overline{AQ} = p$, $\overline{QM} = r$, $\overline{MR} = s$ и $\overline{RB} = t$,

$$\frac{p(s+t)}{r} = \frac{t(r+p)}{s}. \tag{2}$$

Како је тачка M средиште дужи AB, то је $r + p = s+t$, па из (2) слиједи да је $\frac{p}{r} = \frac{t}{s}$. Одавде је $\frac{p+r}{r} = \frac{t+s}{s}$, тј. $\frac{1}{r} = \frac{1}{s}$, односно $r = s$, што је и требало доказати.



Слика 2

Напомена. Ова теорема се може доказати на још много разних начина. Тако, у [1] имамо четири разна доказа ове теореме (један од њих чак помоћу рачунара) и њену генерализацију. У [2] имамо такође један њен лијеп доказ, те још два у [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Z. Čerin, *Poučci o leptirima*, Časopis “Poučak”, **2**, 8, 2001.
2. D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
3. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, *Избранные задачи и теоремы планиметрии*, Наука, Москва 1967.

Данска