Др Шефкет Арсланагић

ЧЕТИРИ ДОКАЗА ЈЕДНЕ АЛГЕБАРСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

Дaћемо четири разна доказа једне занимљиве алгебарске неједнакости која гласи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geqslant\frac{64}{a+b+c+d};\qquad a,b,c,d>0. \tag{1}$$

У пракси у раду са ученицима сам најчешће био свједок како ученици покушавају да докажу ову неједнакост; наиме, они је множе са $abcd(a+b+c+d)>0$ како би се ослободили разломака и онда покушавају да докажу њој еквивалентну неједнакост која је прилично „кабаста“. Наравно, ту се изгубе и не успију у својој накани. Ову „методу“ неки називају „метода орања и копања“ (симпатично и смјешно, нема шта!), У оваквим ситуацијама ја је не свјетујем ученицима и студентима. То значи да нисам ни покушао да је примјеним у овом конкретном случају. Можда неки од будућих читалаца овог чланка то и успије. То би ме обрадовало.

Сада ћемо прећи на разне доказе неједнакости (1).

Доказ 1. (*Коришћење помоћне неједнакости*) Користићемо помоћну неједнакост

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y};\qquad x,y>0 \tag{2}$$

која је после трансформиања еквивалентна неједнакости $(x+y)^2\geqslant 4xy$, односно $(x-y)^2\geqslant 0$, која је тачна и гдје вриједи једнакост само у случају када је $x=y$.

Имамо сада због (2):

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\\&\geqslant\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{16}{d}\\&\geqslant 4\cdot\frac{4}{a+b+c}+\frac{16}{d}=16\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{d}\right)\\&\geqslant 16\cdot\frac{4}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

У (1) вриједи једнакост ако је $a=b$, $a+b=c$ и $a+b+c=d$, тј. $a=b=\frac{d}{4}$ и $c=\frac{d}{2}$.

Доказ 2. (*Коришћење неједнакости Коши-Буњаковски-Шварца* (CBS)) Неједнакост (CBS) гласи

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2), \qquad (3)$$

гдје $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Једнакост вриједи ако и само ако је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Стављајући сада у (3) да је $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{b}$, $a_3 = \sqrt{c}$, $a_4 = \sqrt{d}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $b_3 = \frac{2}{\sqrt{c}}$, $b_4 = \frac{4}{\sqrt{d}}$, добијамо

$$\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}\cdot\frac{2}{\sqrt{c}} + \sqrt{d}\cdot\frac{4}{\sqrt{d}}\right)^2 \leqslant (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right),$$

односно $8^2 \leqslant (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right)$, а одавде неједнакост (1) коју доказујемо.

Доказ 3. (*Коришћење нешто сложеније помоћне неједнакости*) Ријеч о сљедећој помоћној неједнакости

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, \qquad (4)$$

гдје $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ и $x_1, x_2, \cdots > 0$. У (4) вриједи једнакост ако и само ако је $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \cdots = \frac{a_n}{x_n}$.

У [3] је аутор овог чланка опширно писао о неједнакости (4), о њеном доказу и веома ефикасној примјени при доказивању разних неједнакости. Ту је доказано и да се из ове неједнакости једноставно изводи неједнакост (CBS).

Стављајући сада у (4) да је $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$, добијамо

$$\frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d} \geqslant \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d},$$

а одавде неједнакост (1) коју доказујемо.

Доказ 4. (*Коришћење неједнакости између аритметичке и хармонијске средине*) На основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине $(A \geqslant H)$ је

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\frac{c}{2}} + \frac{1}{\frac{c}{2}} + \frac{1}{\frac{d}{4}} + \frac{1}{\frac{d}{4}} + \frac{1}{\frac{d}{4}} + \frac{1}{\frac{d}{4}}\\ &\geqslant \frac{64}{a + b + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4}} = \frac{64}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

Рећи ћемо још нешто о датим доказима неједнакости (1). Свакако, докази 1 и 3 су једноставни уколико се знају помоћне неједнакости (2), односно (4). Ове неједнакости су погодне и за доказивање других сличних неједнакости а на основу њих можемо формирати и друге разне неједнакости.

Доказ 2 је прилично стандардан уколико се зна чувена (CBS) неједнакост. О овој неједнакости је написано пуно чланака и књига јер се ради о изузетно значајној међу аналитичким неједнакостима. Препоручујем да се читаоци упознају са чланком [1] псовећеној неједнакости (CBS).

Код доказа 4 смо користили познату АН неједнакост. При томе смо израз на лијевој страни неједнакости (1) написали нешто другачије, као збир осам позитивних сабирака, и онда примјенили неједнакост $A \geqslant H$. Овај доказ је изузетно кратак и елегантан, можда најљепши од свих датих у овом чланку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet, Sarajevo, 2006.
3. Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet, Sarajevo, 2008.
4. Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet, Sarajevo, 2009.
5. M.R. Bulajich, J.A. Gomez Ortega, R. Delgado Valdez, *Inequalities – A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2009.
6. A. Engel, *Problem-solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Природно-математички факултет, Сарајево, БиХ

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba