Милорад Шуковић, Зоран Ловрен

РЕШЕЊЕ НИЈЕ САМО РЕЗУЛТАТ

Математичари који се баве теоријом решавања математичких проблема у својим радовима истичу, а настава математике потврђује, да се процес решавања математичког задатка одвија кроз четири основне етапе, фазе:

(1) анализа услова и разумевање задатка;

(2) план;

(3) извршавање плана, у свим његовим појединостима;

(4) осврт на задатак и решење (провера решења, анализа и коментар решења, формулисање одговора, резиме).

Ово је једна кратка прича о последњој етапи. Када дођу до решења неког задатка, ученици, по правилу, „откаче“ тај задатак и очекују нови. Тако се готово увек изоставља важна и поучна етапа рада – осврт. Зато код ученика ваља изграђивати сазнање о томе да добијањем решења (одговора, резултата) задатак скоро никада није потпуно искоришћен, већ остаје још понешто да се уради.

Осврт на решавање задатка (својеврстан поглед уназад, али и унапред) згодна је прилика да се истраже везе тог задатка са другим задацима – примена истог поступка у некој другој ситуацији, уопштавање и слично. Пружа се могућност испитивања нових идеја и даљег усмеравања мишљења ученика. Одређено усмеравање постиже се и неким од питања:

Може ли се начин решавања задатка поједноставити?

Да ли се може решити и на неки други начин?

Може ли се уопштити?

Да ли смо сличан поступак раније користили?

Како гласи обрнуто тврђење? Да ли је оно тачно?

И низ других питања која се намећу. Тражењем одговора на та питања развијају се и негују одређене способности ученика, а њихова креативност се подиже на виши ниво.

На неколико лепих, једноставних примера указаћемо на садржајније и потпуније решавање једне врсте геометријских задатака у којима лако и брзо добијамо јединствене резултате иако условима задатка ситуација није једнозначно одређена.

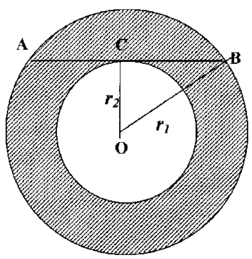
Саопштено на Републичком семинару о настави математике и рачунарства, Нови Сад 2011.

Задатак 1. Тетива $AB = 6\,\mathrm{cm}$ већег круга кружног прстена додирује мањи круг (сл. 1). Израчунај површину кружног прстена.

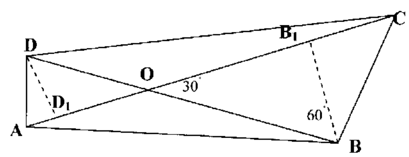
Површина кружног прстена је $P = (r_1^2 - r_2^2)\pi$. Из правоуглог троугла ACB следи $OB^2 - OC^2 = CB^2$, односно $r_1^2 - r_2^2 = (\frac{1}{2}AB)^2 = 9$, па је $P = 9\pi\,\mathrm{cm}^2$. И задатак је решен. Да ли да пређемо на следећи?

Уочимо – резултат не зависи од величине датих кругова. Површина кружног прстена једнозначно је одређена дужином тетиве иако тим податком кружни прстен није задат. О чему се ту ради?

Нацртајмо дуж дужине $6\,\mathrm{cm}$ и њену симетралу. Било која тачка симетрале је средиште двеју кружница од којих је већој дуж AB тетива, а мања додирује AB у средишту C. Сваке две такве кружнице одређују кружни прстен површине $9\pi\,\mathrm{cm}^2$. Када се центар удаљава по симетрали, ширина прстена се смањује али се његова површина не мења. И обрнуто, ширина прстена се повећава. Узмемо ли за центар прстена баш тачку C, мања кружница нестаје, а већој ће дуж AB бити пречник. Површина насталог круга је такође $9\pi\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. 1



Сл. 2

Задатак 2. Израчунај површину четвороугла $ABCD$ чије се дијагонале $AC = 8\,\mathrm{cm}$ и $BD = 12\,\mathrm{cm}$ секу под углом од 30° (сл. 2).

Површина четвороугла $ABCD$ једнака је збиру површина троуглова ABC и ACD. Дакле,

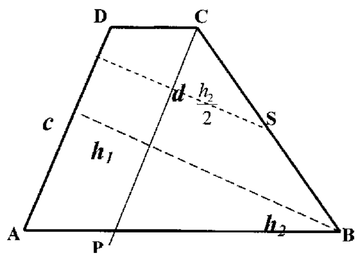
$$P_{ABCD} = \frac{|AC| \cdot |BB_1|}{2} + \frac{|AC| \cdot |DD_1|}{2} = \frac{|AC|}{2}(|BB_1| + |DD_1|)$$
$$= \frac{|AC|}{2}\left(\frac{|BO|}{2} + \frac{|DO|}{2}\right) = \frac{|AC|}{2} \cdot \frac{|BD|}{2} = 24\,\mathrm{cm}^2,$$

јер су у правоуглим троугловима DD_1O и BB_1O углови код O једнаки 30°, па је $DD_1 = \frac{1}{2}DO$, $BB_1 = \frac{1}{2}BO$.

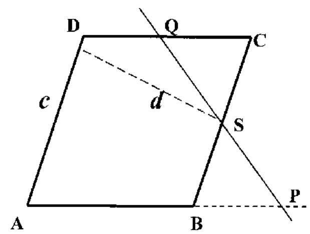
Уочавамо како условима задатка четвороугао није једнозначно одређен али сви четвороуглови који задовољавају услове задатка имају једнаку површину. О чему се ту ради?

Паралелним померањем дијагонале AC (транслација) добијамо низ четвороуглова који одговарају условима задатка, укључујући и „граничне случајеве“ – троуглове страница 8 и 12 и угла између њих 30°. Површина се не мења. Такође, можемо пратити промене које настају паралелним померањем дијагонале BD.

Задатак 3. Један крак трапеза је $c = 6\,\mathrm{cm}$, а одстојање од средишта другог крака је $d = 8\,\mathrm{cm}$ (сл. 3). Израчунај површину трапеза.



Сл. 3



Сл. 4

Права кроз тачку C, паралелна са краком AD, дели трапез на паралелограм $APDC$ и троугао PBC. Према томе,

$$P_{ABCD} = P_{APDC} + P_{PBC} = ch_1 + \frac{ch_2}{2} = c\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) = cd = 48\,\mathrm{cm}^2.$$

О чему се овде ради?

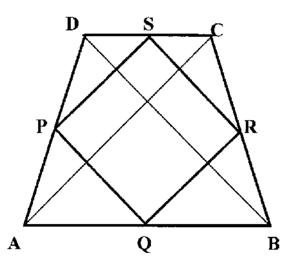
Посматрајмо паралелограм странице c и одговарајуће висине d (сл. 4). Правом кроз средиште S странице BC претварамо паралелограм површине $P = cd$ у трапез једнаке површине ($\triangle BPS \cong \triangle QCS$). Дакле, сви трапези који задовољавају услов задатка „настају“ од паралелограма површине cd.

Задатак 4. Израчунај површину једнакокраког трапеза нормалних дијагонала и висине $8\,\mathrm{cm}$.

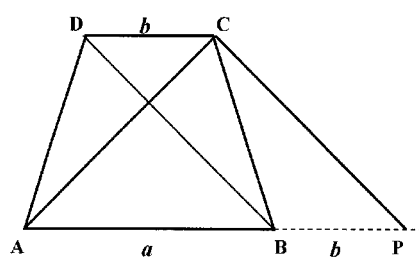
Нека су P, Q, R, S, редом, средишта страница AD, AB, BC, CD датог трапеза (сл. 5). Четвороугао $PQRS$ је квадарат (доказати!). Дакле,

$$P = \frac{|SQ|^2}{2} = \frac{h^2}{2} = 32\,\mathrm{cm}^2.$$

Површина датог трапеза је два пута већа од површине квадрата, $P = 2 \cdot \dfrac{h^2}{2} = h^2 = 64\,\mathrm{cm}^2$. Уочимо: како су дијагонале квадрата једнаке ($PR = SQ$), следи да је висина датог трапеза једнака средњој линији: $\dfrac{a+b}{2} = h$.



Сл. 5



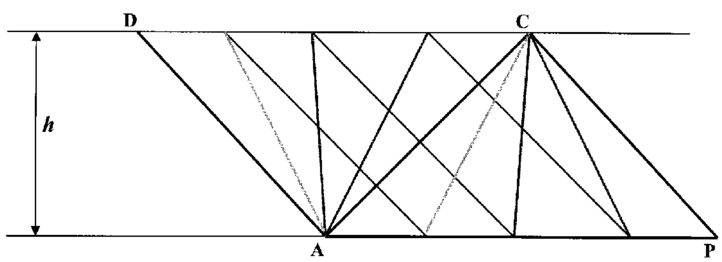
Сл. 6

Други начин. Продужимо основицу AB за дуж $BP = b$ (сл. 6). Троугао APC је једнакокрако-правоугли, његова висина је једнака половини хипотенузе, $AP = a+b$. Заправо, ми смо дати трапез „претворили“ у једнакокрако-правоугли троугао једнаке површине (јер је $\triangle BPC \cong \triangle ADC$),

$$P_{\triangle APC} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2.$$

Површина једнакокраког трапеза нормалних дијагонала једнозначно је одређена дужином висине иако тим податком трапез није једнозначно одређен. О чему се ту ради?

Нека су дате две паралелне праве на међусобном растојању h и дуж $AC = d$ чији крајеви припадају тим правим. Дуж $CP = d$ нормална на AC „клизи“ по правим, сл. 7.

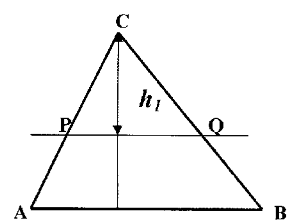


Сл. 7

Тако добијамо низ трапеза који одговарају услову задатка и који су једнаких површина (h^2). Полазећи од почетног, „граничног случаја“ – једнакокрако-правоуглог троугла (APC) катете d, површине P, преко једнакокраких трапеза нормалних дијагонала површине P, све до крајњег положаја, takође једнакокрако-правоуглог троугла DAC.

Задатак 5. Висина која одговара страници AB троугла ABC је 5 cm. На којој удаљености од врха C треба поставити праву паралелну страници AB да би њом троугао био подељен на два дела једнаких површина?

Троуглови ABC и PQC су слични, а по услову задатка је $P_{\triangle ABC} = 2P_{\triangle PQC}$. Дакле, коефицијент сличност је $k = \sqrt{2}$. Висине су такође у односу k, $h = h_1\sqrt{2}$, па је $h_1 = \dfrac{h\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm (половина дијагонале квадрата странице 5 cm).



Сл. 8

Опет, и у овом задатку троугао ABC није јединствено задат, а ипак је решење задатка јединствено. Оно не само што не зависи од облика троугла, већ ни од његове величине.

ОШ „Свети Сава“, Аранђеловац, *E-mail*: sukiaca@sezampro.rs