

Гордана Станков

**УСВАЈАЊЕ САБИРАЊА АЛГЕБАРСКИХ ИЗРАЗА  
УПОТРЕБОМ СЛИКОВНИХ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА**

**Увод**

Ученици свих узраста праве пуно грешака при решавању задатака у којима треба применити елементарна знања из алгебре. Многи од њих алгебру доживљавају као застрашујући свет симбола у коме треба примењивати неразумљива, напамет научена правила. Посебан проблем представља сабирање алгебарских израза.

Милан и Даница из седмог разреда „сабирали“ су на следећи начин:

$$m + m + 5 + 2m = 2m + 7m = 9 + 2m$$

$$m + m + 5 + 2m = 3m + 7$$

Јован из једанаестог разреда написао је:

$$3a + a^2 = 5a$$

Мислим да један од узрока оваквог стања треба тражити у фази учења математике у којој се ученици први пут срећу са алгебарским појмовима. Наиме, прелаз са аритметике на алгебру у настави математике догађа се нагло и многи ученици у том раном периоду учења алгебре не успевају да разумеју и усвоје основне појмове што за последицу има слабе успехе у даљем учењу и примени алгебре.

Ученици српске школе у Будимпешти често не говоре довољно добро српски језик, што им отежава учење. У математици је овај проблем нарочито изражен код решавања текстуалних задатака. Да бих својим ученицима олакшала превазилажење тешкоћа у учењу алгебре разрадила сам и успешно примењујем наставну методу за учење алгебре у седмом разреду основне школе (ученици имају 12 година) која се заснива на употреби конкретних и сликовних репрезентација. (Придржавам се званичног плана и програма Републике Мађарске. Методу примењујем и на часовима допунске наставе и у основној и у средњој школи.) У овом чланку приказаћу на конкретним примерима како ученици усвајају сабирање целих рационалних алгебарских израза по овој наставној методи.

### Теоретска потка

Идеја, да у настави користим конкретне (материјалне) и сликовне (иконичке) репрезентације, јавила ми се пошто сам се упознала са Брунеревом теоријом о репрезентацијама као и са ставовима неких теоретичара.

Према *Bruner*-у (1966) сваки појам и знање има три вида репрезентовања:

- материјални (енактивни) вид: репрезентовање конкретним предметима или се репрезентује низом радњи које се врше користећи конкретне предмете;
- иконички вид: један појам или сазнање може се репрезентовати сликама, графиконима, табелама и дијаграмима;
- симболички вид: репрезентовање симболима, који су део система симбола.

*Wittmann* (1998) наглашава да конкретне и сликовне репрезентације помажу свим ученицима, а не само онима које називамо „спори“ ученици. Корисно је применљивати конкретне и сликовне репрезентације током целокупног процеса учења и не треба ограничавати њихову примену само на почетну фазу учења.

*Polya György* (1977) пише да је математика јако апстрактна наука и баш због тога у настави треба користити конкретна средства.

*Varga Tamás* (Klein, 1980) тврди да се може апстраховати само из конкретних примера и да би неко могао добро да апстрахује, мора да се упозна са разноликим конкретним ситуацијама.

*Josef Kraus* (2006, уредио Caspary) је на основу резултата истраживања рада мозга истакао да од прочитаних информација меморишемо само 10%; од информација које смо чули 20%; од информација које смо видели 30%; од информација које смо чули и видели 50%, а од информација које стичемо кроз сопствене активности у нашој меморији похрањује се чак 90%. Ови подаци доказују да је употреба конкретних и сликовних репрезентација пожељна и оправдана.

*Filloy* (2008) разликује две основне компоненте (фазе) моделовања код увођења математичких појмова коришћењем модела:

- сваком апстрактном математичком појму и операцији одговара конкретан објекат и операција (радња) у конкретном моделу и, обрнуто, сваком објекту и операцији у моделу одговара математички појам и операција
- новоуведени математички појмови и операције се морају одвојити од конкретних значења њима одговарајућих објеката и операција (радњи) у конкретном моделу.

*У наставној методи коју примењујем нарочита пажња је посвећена другој компоненти моделовања: паралелно са радом у моделу ученици користе и стандардне алгебарске симболе. Ученици су временом престајали да користе моделе и радили задатке користећи само стандардне алгебарске симболе.*

### Конкретна значења једноставнијих алгебарских израза

Циљ је да ученици буду у стању да једноставнијим алгебарским изразима придруже конкретна значења, што ће им омогућити да унутар модела лакше изврше одговарајуће операције.

Уводне задатке који следе дајем у конкретном моделу у нади да ће касније, по узору на њих, ученици моћи да придруже алгебарским изразима слична значења.

1. У једној кесици ментол бомбона има  $k$  бомбона. Колико бомбона има у 3 такве кесице?

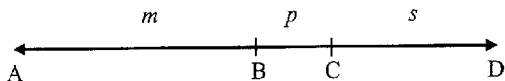
Петар је јуче појео све бомбоне из једне кесице ментол бомбона и још 4 бомбоне из друге такве кесице. Колико је ментол бомбона Петар јуче појео?

Напиши сличан задатак-причу са албумом за фотографије у који може да стане  $m$  фотографија и замоли свог друга или другарицу да га реши.

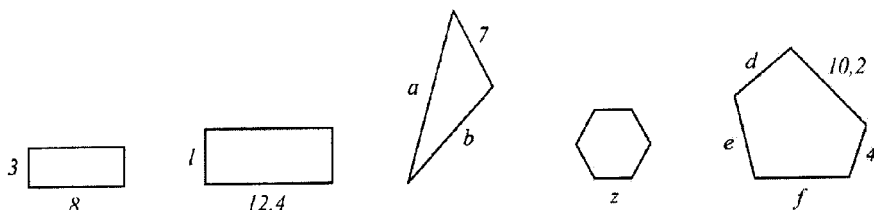
Напиши сличан задатак-причу са неком новом интересантном темом.

(Текстуалне задатке које ученици сами креирају у међусобној комуникацији зовемо задатак-прича или прича.)

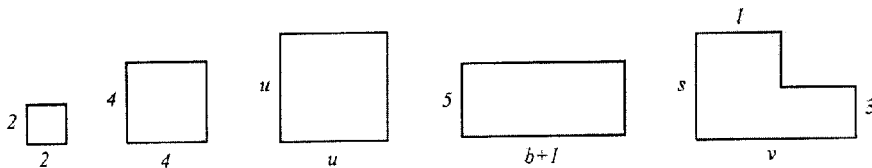
2. На слици изнад сваке од три дужи ( $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ) написан је мерни број дужине те дужи. Одреди мерни број дужине дужи  $AD$ !



3. Одреди мерне бројеве обима датих многоуглова! (Мерни бројеви дужина



4. Одреди мерне бројеве обима и површина датих многоуглова! (Мерни бројеви дужина страница многоуглова написани су поред одговарајућих страница.)



(Код другог квадрата циљ је да ученици приметите да две различите величине (обим и површина) могу имати исте мерне бројеве.)

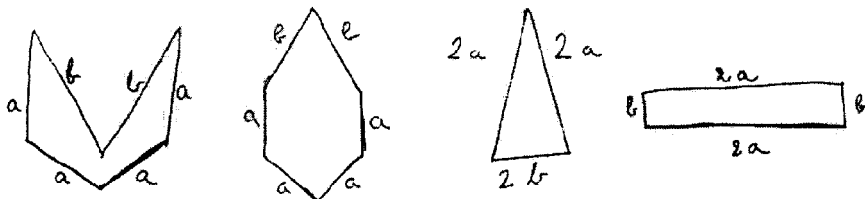
5. На слици је изнад сваке дужи написан мерни број дужине те дужи. Нацртај дужи чији су мерни бројеви:  $3$ ,  $d + 3$ ,  $2 \cdot d$ ,  $2 \cdot d + 3$ ,  $d + 3 \cdot e$ ,  $2 \cdot d + e + 1$ .



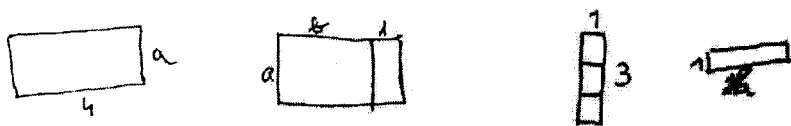
6. Нацртај различите многоуглове за које важи да је мерни број њиховог обима  $4 \cdot a + 2 \cdot b$ . Поред одговарајућих страница многоуглова напиши мерне бројеве дужина тих страница.
7. Нацртај различите многоуглове за које важи да је мерни број њихове површине:  $4 \cdot a$ ;  $(b + 1) \cdot a$ ;  $3$ ;  $h$ . Поред одговарајућих страница многоуглова напиши мерне бројеве дужина тих страница!

Првих пет уводних задатака ученици реше без проблема. Код шестог задатка сви нацртају бар по један многоугао који одговара условима задатка. Израз  $4 \cdot a$  у седмом задатку такође не представља никакав проблем за њих, али за израз  $(b + 1) \cdot a$  неки ученици не успеју да нађу одговарајући пример. Видевши  $3$  и  $h$ , већина ученика се збуни и ништа не нацрта. Наводим нека од тачних ученичких решења за последња два задатка:

Решења 6. задатка:



Решења 7. задатка:



### Сабирања алгебарских израза помоћу сликовних репрезентација

Ученицима после горе наведених вежби задајем задатак сличан овоме:

1. Израчунај (упрости израз)  $2 \cdot c + 7 - c - 5 + 3 - c$ .

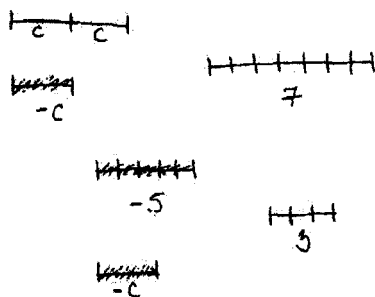
Упутство: Ради лакшег решавања задатка слободно користи цртеже (цртај) или састави одговарајућу „причу“.

Циљ је да ученици сами, према свом афинитету, одаберу модел и да у њему интерпретирају операције.

Тачна решења.

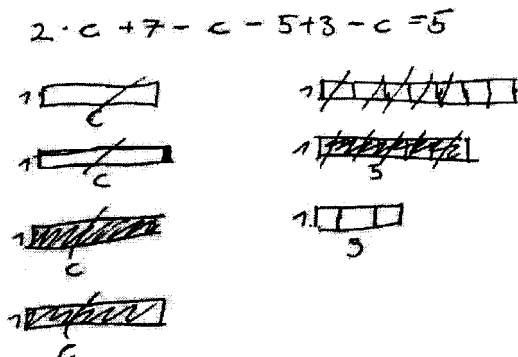
Већина ученика сабира користећи дужи. Представљам решење једне Милице:

$$2 \cdot c + 7 - c - 5 + 3 - c = 5$$



Милица посматра израз као  $2 \cdot c + 7 + (-c) + (-5) + 3 + (-c)$ . Овај израз смо написали на табли, када је Милица објаснила своје решење ученицима из разреда. Сви мономи су представљени посебним дужима, које се састоје од репрезентација за  $c$ ,  $-c$ ,  $1$  или  $-1$ . „Ови су нула“, објаснила је Милица показујући на дужи које репрезентују  $c$  и  $-c$ .

Обично мањи број ученика при изради задатка црта правоугаонике. Следи Игорovo решење:



Рекао је да је ишрафирао (осенчио) оне правоугаонике чије површине треба одузети.

Ретко се дешава да ученици не цртају, већ састављају тзв. приче. Ево једног таквог решења које је написао Оливер за задатак  $4 \cdot d + 5 + 3 \cdot d + 2 + 1 - d$ .

$$4 \cdot d + 5 + 3 \cdot d + 2 + 1 - d = 6d + 8$$

Објашњење је било следеће: „Добио сам од баке четири паковања жвака, од брата пет жвака, од маме три паковања. Од брата сам добио још две и још једну

жваку. Онда сам дао тати једно паковање.“ (Допунили смо „причу“ са: „Колико сада имам жвака?“) Даље ми је рекао да у паковању обично има 10 жвакаћих гума и да је то означило.

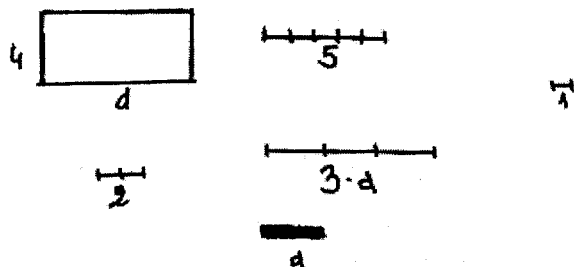
Сва, међусобно различита решења, увек бивају објашњена осталим ученицима на табли, ако су тачна, а тражи се помоћ разреда да би се исправила нетачна решења. Скрећем пажњу ученицима да користећи различите моделе, долазимо да истог резултата.

За различите вредности променљиве  $d$  рачунамо вредности алгебарског израза, интерпретирајући то у различитим моделима.

### Проблеми при решавању задатака

Филип је радећи исти задатак као и Оливер написао и нацртао следеће:

$$4 \cdot d + 5 + 3 \cdot d + 2 + 1 - d = 4 \cdot d + 2 \cdot d + 8$$



Мономе  $4 \cdot d$  и  $2 \cdot d$  није могао да сабере, јер је моному  $4 \cdot d$  придружио правоугаоник, а моному  $2 \cdot d$  придружио је дуж. Пошто је прихватио сугестију другова да и за моном  $4 \cdot d$  нацрта одговарајућу дуж, Филип је самостално успео да дође до тачног резултата.

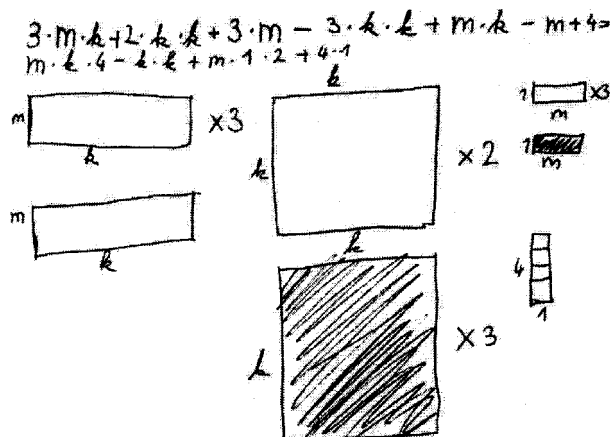
Следе бар два слична задатка за вежбу. Рад у паровима, када ученици једни другима задају и прегледају задатке, показао се корисним. На овај начин раде и размишљају и у моделу који сами можда нису одабрали. Кроз међусобни дијалог и најмање недоумице у вези задатака овога типа и њихових решења нестају.

Радимо теже задатке попут следећег:

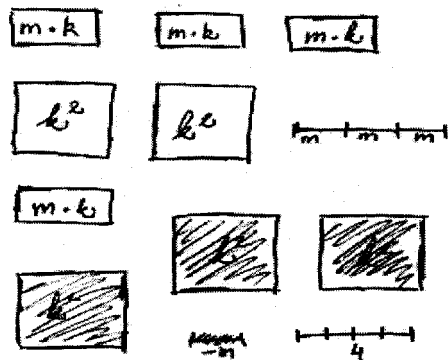
$$2. \text{ Упрости израз } 3 \cdot m \cdot k + 2 \cdot k^2 + 3 \cdot m + m \cdot k - 3 \cdot k^2 - m + 4.$$

Ученици који су при решавању претходног задатка цртали правоугаонике и сада успешно примењују исти модел. Поново представљам Игорovo решење.

Игор је овог пута сваком моному придружио само један правоугаоник са одговарајућим коефицијентом (ако је моном одузимао, одговарајући правоугаоник је ишрафирао). Символичка (стандардна) репрезентација алгебарског израза је аналогна сликовној репрезентацији.



Решавајући задатак, Милица за мономе нултог и првог степена (као и у првом задатку) користи дужи, а за мономе другог степена црта квадрате, односно правоугаонике.



$$4 = m \cdot k + (-1 \cdot k^2) + 2 \cdot m + 4$$

Ову идеју лако прихватају и примењују и ученици који самостално не успеју да реше задатак. Они никада не раде задатак на „Игоров“ начин и поред тога што им се увек презентује и такво решење. Чини се да је ученицима најлакше да користе дужи када се ради о мононима првог и нултог степена. Понекад, да би себи учинили задатак прегледнијим, ученици истом бојом подвлаче сличне мономе, оне којима придружују исте цртеже. Подвлачење помаже и касније, када престану да користе цртеже. Зато им овај „трик“, ако га не открију сами, увек покажем.

Још један час радимо сличне задатке. Ученици међу собом проверавају резултате. Када су резултати различити, кроз дискусију и аргументовање проналазе грешке и исправљају их. Сада већ са сигурношћу препознају сличне мономе. Неки ученици бивају сигурни у своје знање, досади им цртање и задатке раде на стандардан начин, само симболима. Да бих подстакла и остале ученике да алге-

барске изразе сабирају користећи само симболичке репрезентације, а будући да цртање одузима доста времена, проглашавам такмичење: *Ко ће брже да реши задатак*. Сва деца после највише пет самостално урађених задатака престану да користе цртеже и посежу за њима само понекад, приликом проверавања тачности решења.

Подстичем ученике да сами формулишу како се сабирају цели алгебарски изрази, тражећи да одглуме како неком другу телефоном дају упутства на основу којих ће он решити задатак. Спомину: тражи исте; кад су иста слова. После објашњења о значењу речи *моном* уз примере  $(4 \cdot d, 3 \cdot m \cdot k, -3 \cdot k^2, m, 5, 2 \cdot d \cdot 5 \cdot m)$  уводим појам монома као производа (коначно много) реалних бројева и променљивих, с тим да и бројеве сматрамо мономима. Наглашавам да мономе обчно пишемо у облику производа једног броја (кога зовемо коефицијент) и степена једне или више променљивих. (Пишемо коефицијенте монома из претходног примера: 4, 3,  $-3$ , 1, 5, 10.) Слични мономи су они који се у оваквом запису разликују само у коефицијентима. Сада су ученици у стању да формулишу да сабирамо (одузимамо) само сличне мономе тако што њихове коефицијенте саберемо (одуземо), па тај збир (разлику) помножимо са степеном једне, односно производом степена више променљивих који је исти за те сличне мономе.

### Закључак

Придруживање конкретних значења алгебарским изразима је ефикасно помоћно средство за усвајање сабирања целих алгебарских израза. Највећи број ученика веома радо користи цртеже и то комбинацију дужи (код монома нултог и првог степена) и правоугаоника или квадрата (код монома другог степена). Сви ученици после највише пет самостално урађених задатака задатке раде употребљавајући само симболе, а цртеже користе као могући начин провере тачности решења.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bruner, J. S., *Towards a Theory of Instruction*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1966, 44–45.
2. Caspary, R., *Lernen und Gehirn*, Herder spectrum, Freiburg 2006, 142–154.
3. Filloy, E., Puig, L., Rojano, T., *Educational Algebra*, Springer Science & Business Media, LLC, 2008, 134–134.
4. Klein, S., *A komplex matematikantási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980, 44–45.
5. Piaget, J., *Psychologie der Intelligenz*, Klett Stuttgart, 1967.
6. Pólya, Gy., *A gondolkodás iskolája*, Gondolat, Budapest, 1977, 236.
7. Wittmann, E. Ch., *Standard number representations in the teaching of arithmetic*, J. für Mathematik-Didaktik **2/3**, 1998, 149–178.