НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
LVI, 1 (2011), 1–7

Др Бранислав Боричић

ДИЈАГРАМИ У НАСТАВИ ЛОГИКЕ И ТЕОРИЈЕ СКУПОВА

У излагању математичких чињеница, објашњења и доказа користимо се лингвистичким (природни језик и математичка симболика) и визуелним (слике и дијаграми) средствима. Ова средства се не искључују, али ипак немају равноправан статус. Визуелна средства се више сматрају помоћним, док лингвистичка, по правилу, имају централну улогу. Такав став је традиционално прихваћен, упркос чињеници да о многим стварима ми и интимно размишљамо базирајући се на визуелним, а не на лингвистичким представама; да и не говоримо о супериорности визуелног приступа у настави многих методских јединица, над лингвистичким приступом. Да ли би уопште настава геометрије, географије, хемије или физике, лишена визуелне представе, могла имати икаквог смисла? Присетимо се само места и улоге картографије у географији, структурних фомула у органској хемији, као једног специфичног дијаграматског метода представљања структуре једињења, блок-дијаграма у програмирању или, коначно, графика реалне функције једне променљиве који обједињује у себи низ битних својстава те функције и кореспондира са низом поступака који се у интеракцији са графиком могу контролисати. Геометрија као дисциплина која, од свог настанка, обједињује „реч и слику“, управо због тога, заузима централно место у наставним програмима до данашњих дана, иако се бави идеалним објектима, који у реалном животу уопште и не постоје!

Питање којим ћемо се бавити у овом чланку могло би бити формулисано овако: *Да ли и у којој мери можемо експлоатисати дијаграме и слике у презентирању појединих наставних јединица везаних за елементарну теорију скупова и логику? Да ли „доказе“ који се базирају искључиво на дијаграмима можемо сматрати адекватним?* Питање се природно намеће, јер су честе ситуације када се у „доказу“ неке чињенице, на пример из геометрије, наставник или ученик позове на слику и каже: *Види се са слике!* Знамо да у таквим случајевима слика, иако неопходна као помоћно средство, најчешће не може послужити као есенцијални аргумент у доказу. Међутим, у елементарној теорији скупова и класичној логици исказа, ствари стоје потпуно другачије. Наиме, ту су дијаграми не само пожељни као дидактичко средство, него и довољни као методолошко средство, јер сами по себи поседују моћ доказивања.

Рад на овом чланку је делом финансирало Министарство за науку и технологију Републике Србије, пројекат број: 179005.

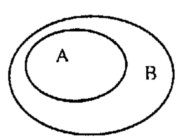
У овом чланку ћемо, након кратког прегледа историје употребе дијаграма од стране Ојлера[1], Вена[2] и Перса[3], пружити додатне аргументе за употребу дијаграма у настави која се односи на уводне појмове елементарне теорије скупова и класичне логике исказа. Такође ћемо дати и допунске разлоге за употребу управо оне врсте дијаграма која је и у најширој употреби у настави математике и која је углавном позната у литератури под називом *Ојлер-Венови дијаграми*.

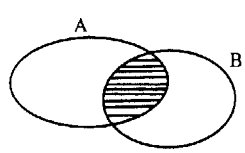
1. Укратко о историји употребе дијаграма

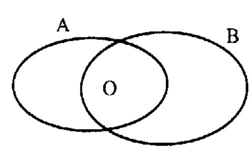
Егзактна употреба дијаграма у логици и теорији скупова се везује углавном за имена Ојлера, Вена и Перса. Њихови системи дијаграма су настали у покушајима формализације визуелног представљања фигура силогистичког закључивања. Најједноставнији по форми и са најслабијим изражајним могућностима је систем дијаграма који налазимо код Ојлера (*Lettres à une princesse d'Allemagne*, 1761). Овај систем је и најближи систему дијаграма који се данас користи у представљању основних скуповних операција и релација у елементарној теорији скупова, а који се најчешће везује и за Веново име. По својој сложености и изражајним моћима следе, редом, Венов (*Symbolic Logic*, 1881) и Персов (1896) систем дијаграма. Интересантно је напоменути да је један систем дијаграма, за исте намене, био развијен и од стране Лајбница[4], али како рукопис у којем се развија тај систем није доспео у јавност све до 1903. године, то ова идеја генијалног математичара и филозофа није могла извршити правовремено одговарајући утицај на развој дате области.

Као илустрацију за сва три горе поменута приступа наводимо следеће примере.

Реченицу: *„Сваки А је В“*, редом, Ојлеровим [4], Веновим [7] и Персовим [9] дијаграмом бисмо представили овако:







[1] Leonhard Euler (1707–1783), славни европски математичар, физичар и астроном, швајцарског порекла. Тристота годишњица Ојлеровог рођења обележена је 2007. године у научној јавности широм света (в. `http://math.dartmouth.edu/ euler/`, `http://www.euler-2007.ch/`, `http://www.eulersociety.org/`). Мали тих места придружио се и Београд предавањем које је било посвећено подсећању на основне Ојлерове биографске податке и његове чувене математичке резултате од општег значаја, уз посебан осврт на Ојлерове резултате који представљају фундаменте математичке економије (Ојлерова теорема за хомогене функције), теорије графова, теорије вероватноћа и статистике (B- и Γ-функција), као допринос савременој математичкој симболици (в. `http://www.ekof.bg.ac.rs/seminari/seminari.php`).

[2] John Venn (1834–1923), британски математичар и логичар.

[3] Charles Sanders Peirce (1839–1914), амерички математичар, логичар и филозоф.

[4] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), славни немачки математичар и филозоф.

Дакле, Ојлеровим дијаграмом непосредно представљамо описани однос међу скуповима, у Веновом дијаграму полазимо од општег положаја скупова и користимо се сенчењем да бисмо означили празан део скупа, док у Персовом дијаграму празан део скупа означавамо симболом ‘0’, а непразан део симболом ‘**x**’. Одавде већ следи да ће Персови дијаграми поседовати већу изражајну моћ од Ојлерових и Венових, али ће, с друге стране, Ојлерови и Венови дијаграми, због своје веће једноставности, задржати примат као дидактичко средство.

Суптилнију анализу међусобних односа и изражајних моћи дијаграматских система Ојлера, Вена и Перса детаљно се баве аутори у делима [1], [5] и [8].

2. О употреби дијаграма у теорији скупова

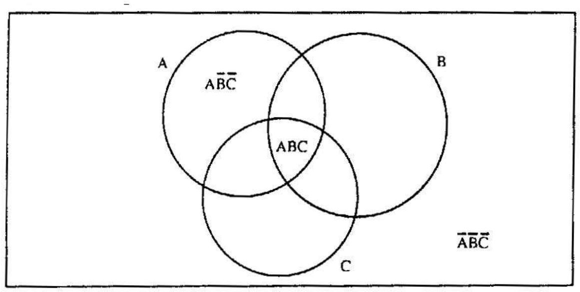
Када образлажемо скуповну једнакост

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

која изражава дистрибутивни закон уније према пресеку, најчешће прибегавамо одговарајућој таутологији, дистрибуције дисјункције према конјункцији,

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee q)$$

коју доказујемо помоћу једне истинитосне $(\top, \bot)$-таблице која ће, да би покрила све одговарајуће случајеве, имати укупно 8 врста. Потпуно исто и, што је најважније, подједнако ваљано образложење ове скуповне једнакости бисмо могли добити користећи одговарајући Ојлеров дијаграм на којем је сасвим јасно издиференцирано свих 8 случајева овако:



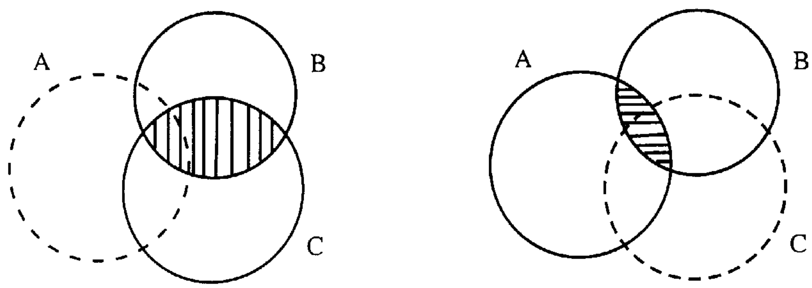
где, на пример, случај са ознаком $AB\overline{C}$ представља ситуацију када је $x \in A$, $x \in B$ и $x \notin C$, за коју се треба уверити да је посматрана једнакост задовољена, када, заиста, важи: $x \in A \cup (B \cap C)$ и $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Размотрени случај, јасно је, кореспондира са оном врстом у таблици када исказним словима p, q и r, редом, задајемо вредности $\top$, $\top$ и $\bot$. У овако непосредној вези међу врстама таблице истинитосних вредности и одговарајућим случајевима означеним са ABC, $AB\overline{C}$, ... , $\overline{ABC}$ на дијаграму, међу којима постоји бијективно придруживање, треба тражити објашњење доказне моћи дијаграма у елементарној теорији скупова.

Другим речима, разматрање случајева назначених у дијаграму је довољно за доказ или оповргавање сваког могућег односа између три произвољна апстрактна скупа.

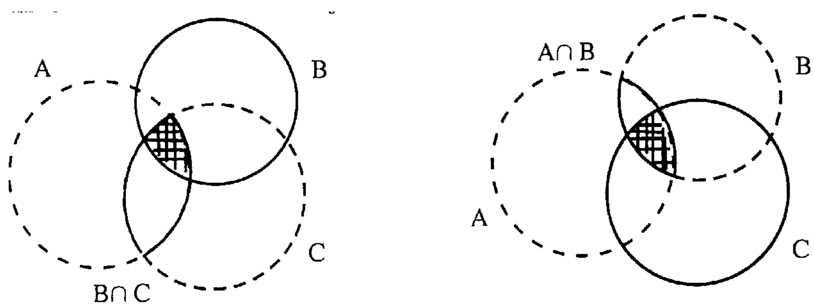
Осим оваквог приступа који подразумева разматрање случајева, дијаграме можемо и сасвим непосредно користити у демонстрирању сличних доказа, када њихова снага и највише долази до изражаја. На пример, дијаграматски доказ асоцијативног закона за операцију пресека

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

би могло тећи паралелно за леву и десну страну једнакости овако:



одакле, у другом кораку добијамо:



па директно закључујемо да, за произвољне скупове A, B и C важи $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Овакво извођење доказа би, уз употребу савремених средстава у настави, на пример, слајдова[5], могло да буде још очигледније и, као анимирано, интересантније ученицима.

3. О употреби дијаграма у логици

Основу логичке апаратуре чине исказни везници чије се понашање традиционално, у духу Буловог[6] приступа, прецизно дефинише у оквиру одговарајуће алгебре исказа у којој се исказни везници интерпретирају као алгебарске операције. Такав приступ се показао као плодоносан и добар, али ипак оставља низ недоумица са дидактичког становишта. Главна идеја водиља је заснована на чврстој

[5] У употреби нових идеја и програмских пакета у настави треба бити веома промишљен и уздржан, што би морала бити перманентна тема свих семинара о настави математике.

[6] George Boole (1815–1864), енглески математичар, оснивач савремене симболичке логике.

кореспонденцији између основних операција над скуповима и основним логичким везницима, кореспонденцији у којој пресек и унију ($\cap$ и $\cup$) повезујемо са конјункцијом и дисјункцијом ($\wedge$ и $\vee$), комплемент скупа са негацијом исказа, а релације једнакости и инклузије међу скуповима, са еквиваленцијом и импликацијом међу одговарајућим исказима.

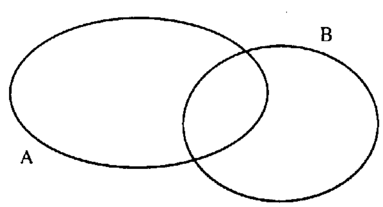
На примерима универзално-афирмативне, партикуларно-афирмативне, универзално-негативне и партикуларно-негативне реченичне форме, какве се појављују у Аристотеловој силогистици, демонстрираћемо њихово представљање Веновим дијаграмима, аналогно оном које смо имали у теорији скупова. Наиме, како следећим реченицама:

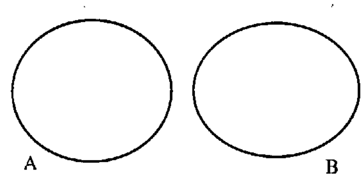
Сваки A је B.
Неки A је B.
Ниједан A није B.
Неки A није B.

редом, одговарају следећи односи међу скуповима:

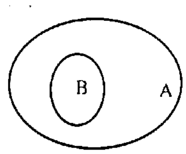
$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$$
$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$$
$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$$
$$\neg(\mathbf{A} \subset \mathbf{B})$$

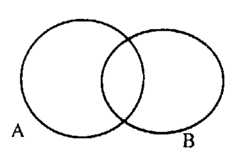
где смо са $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, редом, означили скупове $\{\, x \mid A(x) \,\}$ и $\{\, x \mid B(x) \,\}$, то ћемо имати и следећа представљања ових ситуација дијаграмима. Како смо прву реченицу већ представили у уводном делу овог текста, предстоји нам да представимо преостале три реченице. Одговарајући Ојлерови дијаграми за други и трећи случај, редом, биће:

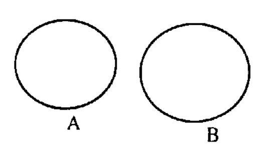




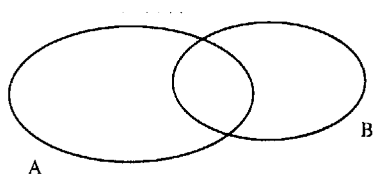
док четврти случај представљамо Ојлеровим дијаграмима као једну од следеће три могућности:





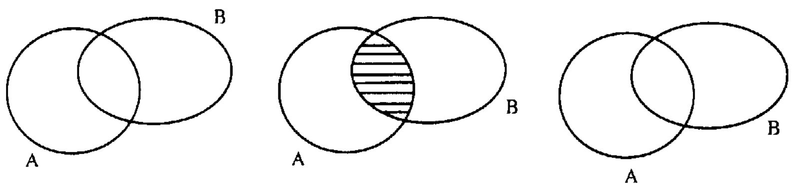


или, пак, дијаграмом:



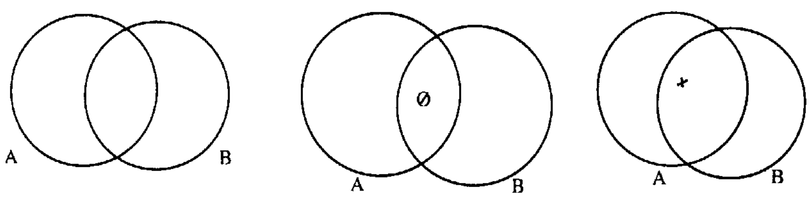
уз напомену да део скупа **A** који не припада скупу **B** свакако мора бити непразан.

Одговарајући Венови дијаграми су:



где би се, слично као у представљању Ојлеровим дијаграмима, у последњем случају морало нагласити такође да је део скупа **A** који не припада скупу **B** непразан.

Персови дијаграми имају следећи облик:



На крају овог чланка илуструјемо примену Ојлерових дијаграма у логичком закључивању кроз следећи пример једноставног силогистичког извођења. Наиме, из хипотеза:

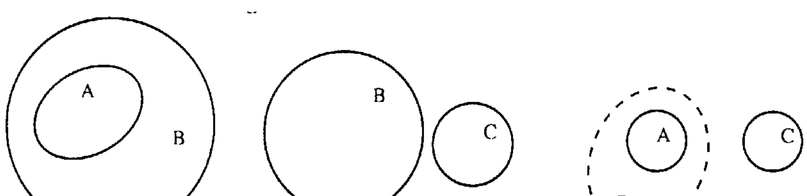
(1) Сваки A је B.

(2) Ниједан B није C.

следи:

(3) Ниједан A није C.

што би се дијаграмима могло образложити овако:



(1) (2) (3)

тј. да, очигледно, из ситуација представљеним дијаграмима (1) и (2), следи ситуација представљена дијаграмом (3). Напомињемо да смо овим примером само покушали да пренесемо дух дијаграматског закључивања, иако оно може бити и много сложеније од овог.

Овом приликом читаоца упућујемо на новију литературу (в. [1], [5] и [8]) у којој се темељно образлаже дијаграматски приступ логикама исказа и предиката и доказују одговарајући ставови потпуности, који апсолутно оправдавају употребу дијаграма у логици. Такође, у вези са Аристотеловим силогизмима, који и данас представљају важан дидактички материјал у изучавању принципа логичког закључивања, препоручујемо изворе [2], [3] и [6].

Све што смо овде навели заправо оправдава уобичајени назив, *Ојлер-Венови дијаграми*, за дијаграме који су у најширој употреби у настави математике, али и само коришћење ових дијаграма због њихове једноставности (у односу на, на пример, Персове дијаграме), а, ипак, довољне изражајне моћи у комбинацији са додатним усмено датим или писаним објашњењима наставника.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Allwein, J. Barwise (Eds.), *Logical Reasoning with Diagrams*, Oxford University Press, New York, 1996.
2. I. M. Bocheński, *A History of Formal Logic*, Chelsea Publ. Com., New York, 1970.
3. D. Bostock, *Intermediate Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
4. L. Euler, *Briefe an Eine Deutsce Prinzessin*, Friedrich Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1986.
5. E. M. Hammer, *Logic and Visual Information*, CSLI Publications, Stanford, 1995.
6. A. Nerode, R. A. Shore, *Logic for Applications*, Springer, New York, 1997.
7. C. S. Peirce, *The Collected Papers of C. S. Peirce*, Harvard University Press, Cambridge, 1960.
8. S.-J. Shin, *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1994.
9. J. Venn, *Symbolic Logic*, Burt Franklin, New York, 1971.

Бранислав Боричић, Универзитет у Београду, Економски факултет, Каменичка 6, 11000 Београд

E-mail: `boricic@ekof.bg.ac.rs`