Др Божидар Јовановић

ЛИНЕАРИЗАЦИЈА ИНТЕГРАБИЛНИХ СИСТЕМА

1. Лијева алгебра Хамилтонових векторских поља

1.1. Овај чланак је наставак [Jo]. Док смо се у [Jo] упознали са потпуном интеграбилношћу, сада ћемо, се упознати и са појмом некомутативне интеграбилности, која одговара раслојавању фазног простора на торусе димензије мање од половине димензије фазног простора [MФ, Н, БЈ]. Дајемо доказ линеаризације таквих система (секција 2). Доказ линеаризације садржи основне појмове дејстава група, али може се пратити и без икаквог предзнања.

Као пример наводимо систем два идентична хармонијска осцилатора. Показује се да тај систем даје природни опис Хопфовог раслојења сфере на кружнице (секција 3). Ради јаснијег излагања, подсетићемо се неких основних појмова, делом уведених у [Jo].

1.2. *Лијева алгебра* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ над пољем реалних бројева $\mathbf{R}$ је реални векторски простор $\mathfrak{g}$ заједно са операцијом $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ која је билинеарна, кососиметрична и задовољава *Јакобијев идентитет*:

$$
\begin{aligned}
&[\alpha X+\beta Y, Z] = \alpha[X,Z]+\beta[Y,Z],\\
&[X,Y] = -[Y,X],\\
&[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]] = 0, \qquad \alpha,\beta\in\mathbf{R}, \quad X,Y,Z\in\mathfrak{g}.
\end{aligned}
$$

Основни пример коначно димензионе Лијеве алгебре је $(gl(n,\mathbf{R}), [\cdot,\cdot])$, где је $gl(n,\mathbf{R})$ векторски простор $n\times n$ реалних матрица и $[\cdot,\cdot]$ је уобичајен комутатор матрица: $[A,B]=AB-BA$. Такође, тродимензиони Еуклидски векторски простор са уобичајеним векторским производом $(\mathbf{R}^3,\times)$ је пример Лијеве алгебре кога смо упознали још у средњој школи.

Са друге стране један од основних примера бесконачно-димензионе Лијеве алгебре је $(X(V),[\cdot,\cdot])$ – векторски простор векторских поља на области $V\subset\mathbf{R}^d$, где је $[\cdot,\cdot]$ *комутатор векторских поља.* Познато је да се векторско поље X може идентификовати са оператором диференцирања у правцу векторског поља

Рад је написан у оквиру пројекта 144014 Геометрија и топологија многострукости и интеграбилни динамички системи, Министарсва за науку Србије. Захваљујем се Ђорђу Баралићу на корисним примедбама.

$f \mapsto X(f)$, $f \in C^\infty(V)$. Комутатор $[X,Y]$ векторских поља се може дефинисати као оператор диференцирања

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \qquad f \in C^\infty(V), \tag{1}$$

где су $X = (X_1,\dots,X_d)$ и $Y = (Y_1,\dots,Y_d)$ векторска поља X и Y. Комутатор $[X,Y]$ се из (1) лако одређује:

$$[X,Y] = \left(\sum_{i=1}^{d}\left(X_i\frac{\partial Y_1}{\partial x_i} - Y_i\frac{\partial X_1}{\partial x_i}\right),\dots,\sum_{i=1}^{d}\left(X_i\frac{\partial Y_d}{\partial x_i} - Y_i\frac{\partial X_d}{\partial x_i}\right)\right)$$

1.3. Посматрајмо једначине

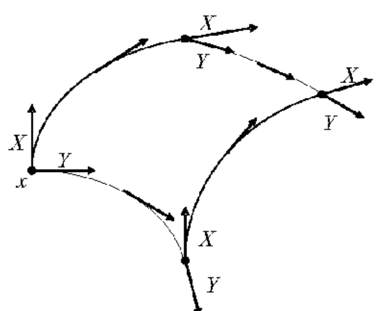
$$\dot{x} = X(x) \tag{2}$$

дефинисане унутар области $V \subset \mathbf{R}^d$. Векторско поље $X \in X(V)$ је *комплетно* уколико индукује *једнопараметарску групу дифеоморфизама* $g_X^t : V \to V$,

$$g_X^t \circ g_X^s = g_X^s \circ g_X^t = g_X^{t+s}, \quad g_X^0 = Id_U, \quad t \in \mathbf{R},$$

таквих да су решења једначине (2) са почетним условом $x(t_0) = x^0$ дата са $x(t) = g_X^{t-t_0}x^0$. Група g_X^t се назива и *фазни ток* једначина (2).

Када X и није комплетно, оно ипак индукује групу *локалних једнопараметерских дифеоморфизама* g_X^t, дефинисаних у околини сваке тачке и за мале вредности параметра t.



Слика 1. Комутативна векторска поља: $g_X^t(g_Y^s(x)) = g_Y^s(g_X^t(x))$.

Може се дати следећа важна геометријска особина комутатора векторских поља: $[X,Y] \equiv 0$ у некој околини тачке x ако и само ако (локалне) једнопараметарске групе дифеоморфизама g_X^t и g_Y^s комутирају:

$$g_X^t \circ g_Y^s = g_Y^s \circ g_X^t,$$

за одговарајућу околину тачке x и довољно мале параметре t и s [Ар].

Нека је $M \subset V$ компактна површ и нека је векторско поље $X(x)$ у тачкама $x \in M$ тангентно на M. Тада, иако X не мора бити комплетно векторско поље на V, X индукује једнопараметарску групу дифеоморфизама g_X^t површи M.

1.4. *Канонска Пуасонова структура* (или *канонска Пуасонова заграда*) у области U простора $\mathbf{R}^{2n}(q,p) = \mathbf{R}^{2n}(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ је пресликавање $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(U) \times C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, дефинисано изразом:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{3}$$

Векторски простор глатких функција на $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ у односну на Пуасонову заграду је пример бесконачо-димензионе Лијеве алгебре. Пуасонова заграда је билинеарно, кососиметрично пресликавање које задовољава Јакобијев идентитет као и *Лајбницово правило*: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

За дату глатку функцију $h(q, p)$, дефинишемо *Хамилтоново векторско поље* $X_h(q, p)$ условом да је извод произвољне функције дуж векторског поља X_h дат Пуасоновом заградом:

$$X_h(f) = \{f, h\}, \tag{4}$$

или, еквивалентно, изразом:

$$X_h = \left(\frac{\partial h}{\partial p}, -\frac{\partial h}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial p_n}, -\frac{\partial h}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial h}{\partial q_n}\right).$$

Једначине

$$(\dot{q}, \dot{p}) = X_h(q, p) \tag{5}$$

називају се *Хамилтонове једначине* са *Хамилтонијаном* $h(q, p)$. Из (4) имамо следећу карактеристику интеграла: функција f је интеграл система (5) ако и само ако комутира са h: $\{h, f\} = 0$. Специјално, сам Хамилтонијан је интеграл кретања.

Тако је функција f интеграл ако и само ако је и Хамилтонијан h константан дуж Хамилтоновог векторског поља X_f, тј. (локални) фазни ток векторског поља X_f је *симетрија* Хамилтонијана h: $h \circ g^t_{X_f} = h$.[1]

Нека је $(X(U), [\cdot, \cdot])$ Лијева алгебра векторских поља на $U \subset \mathbf{R}^{2n}$.

Став 1. *Пресликавање*

$$C^\infty(U) \longrightarrow X(U): \qquad f \longmapsto X_f \tag{6}$$

је анти-хомоморфизам Лијевих алгебри[2]*. Наиме важи:*

$$X_{\alpha f+\beta g} = \alpha X_f + \beta X_g, \qquad X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g], \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ f, g \in C^\infty(U). \tag{7}$$

Доказ. Прва релација у (7) је очигледна. Нека је h произвољна функција. Тада

$$\begin{aligned}
[X_f, X_g](h) &= X_f X_g(h) - X_g X_f(h) \quad (\text{ дефиниција комутатора}) \\
&= X_f(\{h, g\} - X_g(\{h, f\}) \quad (\text{ једначина (4)}) \\
&= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} \quad (\text{ једначина (4)}) \\
&= -\{h, \{f, g\}\} \quad (\text{ Јакобијев идентитет}) \\
&= -X_{\{f,g\}}(h) \quad (\text{ једначина (4)}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

[1] Важна особина Хамилтоновог векторског поља X_f, коју нећемо директно користити у овом излагању, јесте да је његов фазни ток (локална) канонска трансформација, наиме: $\{f_1 \circ g^t_{X_f}, f_2 \circ g^t_{X_f}\} = \{f_1, f_2\}$ [Ар].

[2] Хомоморфизам (изоморфизам) Лијевих алгебри $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot]_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_2)$ је линеарно пресликавање (изоморфизам) векторских простора $A : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ које чува структуру Лијеве алгебре: $[AX, AY]_2 = [X, Y]_1$, $X, Y \in \mathfrak{g}_1$.

2. Некомутативна интеграбилност

Једначине (5) су *потпуно интеграбилне* уколико поседују n функционално независних интеграла који међусобно комутирају. На основу става 1, видимо да комутативним интегралима одговарају симетрије Хамилтонијана у односу на (локална) комутативна дејста фазних токова одговарајућих Хамилтонових векторских поља. Са друге стране, у зависности од физичког проблема, дешава се да Хамилтонови системи имају и „некомутативне симетрије“, тј. прве интеграле који не комутирају. То је довело до појма некомутативне интеграбилности коме одговара следећа теорема (видети [МФ, Н]):

Теорема 1. *Нека једначине* (5) *имају* $n+r$ *интеграла кретаа* $f_1,\dots,f_{n+r}$, *таквих да првих* $n-r$ *комутирају са свим интегралима*

$$\{f_i,f_j\}=0,\quad i=1,\dots,n-r,\quad j=1,\dots,n+r,$$

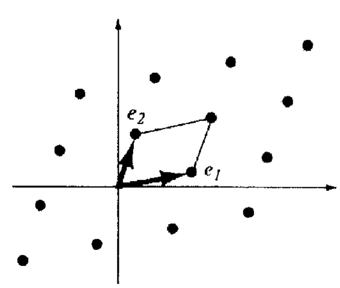
и нека је $P_c=\{f_1=c_1,\dots,f_{n+r}=c_{n-r}\}$ *инваријантна површ. Ако је* P_c *повезана компактна, глатка површ (диференцијали функција* $f_1,\dots,f_{n+r}$ *су независни на* P_c*) тада је она дифеоморфна* $(n-r)$*-димензионом торусу* $\mathbf{T}^{n-r}$. *На* P_c *се могу одредити координате* $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-r}$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ *у којима се једначине* (5) *линеаризују:*

$$\dot\varphi_1=\omega_1,\dots,\dot\varphi_{n-r}=\omega_{n-r}. \tag{8}$$

Специјално, за $r=0$ имамо линеаризацију у Лиувил-Арнољдовој теореми. За системе које задовољавају услове теореме са $1\le r\le n-1$ кажемо да су *интеграбилним у некомутативном смислу.* Они су уједно и потпуно интеграбилни, тј. имају n комутативних интеграла [БЈ].

Незнатно модификујући приступ из [Ар], дајемо доказ теореме 1.

Нека је Γ подгрупа $\mathbf{R}^n$. Уколико постоји околина U таква да је $\Gamma\cap U=\{0\}$, тада ће и пресек $\mathbf{e}+U$ са Γ садржати само $\mathbf{e}$, за све $\mathbf{e}\in\Gamma$. Такве подгрупе називамо *дискретним* подгрупама или *решеткама* у $\mathbf{R}^n$.



Слика 2

Лема 1. *Нека је* Γ *решетка у* $\mathbf{R}^n$. *Тада постоји* $k\le n$ *линеарно независних вектора* $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k\in\Gamma$, *таквих да је* Γ *задата њиховим целобројним комбинацијама*

$$\Gamma=\{\,m_1\mathbf{e}_1+\dots+m_k\mathbf{e}_k\mid(m_1,\dots,m_k)\in\mathbf{Z}^k\,\}.$$

Доказ. Нека је W векторски подпростор од $\mathbf{R}^n$, генерисан скупом Γ и нека је $\dim W = k \leq n$. Можемо узети базу $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_k$ од W, где $\mathbf{e}'_i$ припадају Γ. Дакле сви елементи из решетке Γ се могу добити као реалне линеарне комбинације $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_k$. Посматрајмо фамилију потпростора

$$W_1 = \langle \mathbf{e}'_1 \rangle \subset W_2 = \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle \subset \cdots \subset W_k = W = \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_k \rangle.$$

Тражену базу конструишемо на следећи начин. Нека је $\mathbf{e}_1 \neq 0$ један од два елемента из $\Gamma \cap W_1$ најближих 0 (други је тада $-\mathbf{e}_1$). Из конструкције имамо

$$\Gamma \cap W_1 = \{\, m_1 \mathbf{e}_1 \mid m_1 \in \mathbf{Z}\,\}.$$

Даље, за $\mathbf{e}_2$ узимамо елемент из $\Gamma \cap W_2$, који не припада W_1 и који достиже минимално растојање од W_1. (Зашто постоји такав елемент?) Тада је

$$\Gamma \cap W_2 = \{\, m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbf{Z}\,\}.$$

Заиста, ако постоји $\mathbf{e}' \in \Gamma \cap W_2$ ван тог скупа, тада линеарном целобројном комбинацијом са $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ добијамо елемент $\mathbf{e} \neq 0$ који припада Γ, као и полуотвореном паралелограму

$$\Pi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \{\, \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 1\,\}.$$

Ако је $\mathbf{e} = \alpha_1 \mathbf{e}_1$ то је у супротности са избором $\mathbf{e}_1$. Са друге стране, ако је $\mathbf{e} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2$ $(0 < \alpha_2 < 1)$, то је контрадикција са избором $\mathbf{e}_2$ јер је тада растојање између $\mathbf{e}$ и W_1 мање од растојања између $\mathbf{e}_2$ и W_1.

На сличан начин одређујемо $\mathbf{e}_3$, као елеменат $\Gamma \cap W_3$, који не припада W_2 а достиже минимално растојање од равни W_2. Поступак настављамо до одређивања $\mathbf{e}_k$. ∎

Доказ теореме 1. Корак 1. Како функције f_i, $i = 1, \dots, n-r$ комутирају са другим интегралима, на основу (4) имаћемо да

$$X_{f_i}(f_j) = \{f_j, f_i\} = 0, \quad i = 1, \dots, n-r, \quad j = 1, \dots, n+r,$$

што за последицу има да векторска поља $X_1 = X_{f_1}, \dots, X_{n-r} = X_{f_{n-r}}$ тангирају инваријантну površ P_c.

Такође, Хамилтоново векторско поље X_f једнако је 0 у x ако и само ако је диференцијал функције f једнак 0 у x. Како су диференцијали $df_1, \dots, df_{n-r}$ независни на P_c, добијамо да векторска поља X_i разапињу тангентни простор $T_x P_c$ за све $x \in P_c$.

Како је P_c компактно, векторска поља $X_1, \dots, X_{n-r}$ су комплетна. Посматрајмо једнопараметарске групе $g_i^{s_i}$, $s_i \in \mathbf{R}$ трансформација P_c задатих векторским пољима X_i. На основу Става 1 имамо да $[X_i, X_j] = 0$ што повлачи комутативност пресликавања $g_i^{s_i}$ и $g_j^{s_j}$. Дефинишимо дифеоморфизме

$$g^s(x) = g_1^{s_1} \cdots g_{n-r}^{s_{n-r}}(x), \qquad s = (s_1, \dots, s_{n-r}) \in \mathbf{R}^{n-r}. \tag{9}$$

Тада ће важити:

$$g^s \circ g^t = g^t \circ g^s = g^{s+t}, \quad g^0 = Id_{P_c}, \quad s, t \in \mathbf{R}^{n-r}. \tag{10}$$

Услови (10) нам дају да је са (9) дато добро дефинисано *дејство* абелове групе $\mathbf{R}^{n-r}$ на P_c[3].

Корак 2. Како су $X_1, \ldots, X_{n-r}$ независна векторска поља и како је P_c повезано, добијамо да је дејство (9) *локално слободно* (за свако $x \in P_c$, за довољно мало $s \in \mathbf{R}^n$, је $g^s(x) \neq x$) и *транзитивно* (за сваке две тачке $x, y \in \mathcal{P}_c$ постоји $s \in \mathbf{R}^{n-r}$, $g^s(x) = y$). Заиста, нека је γ произвољан пут који спаја x и y. Тада на γ постоји низ тачака $x^1, \ldots, x^{k-1}$ и низ вектора $s^1, \ldots, s^k$ таквих да је

$$x^1 = g^{s^1}(x),\, x^2 = g^{s^2}(x^1),\, \ldots, x^{r-1} = g^{s^{k-1}}(x^{k-2}),\, y = g^{s^k}(x^{k-1}),$$

па је самим тим $y = g^s(x)$, $s = s^1 + s^2 + \cdots + s^k$.

Нека је x^0 произвољна фиксирана тачка на P_c. Из транзитивности дејства имамо да је пресликавање:

$$\rho : \mathbf{R}^{n-r} \to P_c, \qquad \rho(s) := g^s(x^0)$$

на. При пресликавању ρ, константна векторска поља $(1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)$ сликају се редом у Хамилтонова векторска поља $X_1, \ldots, X_{n-r}$.

Лако се проверава да је $\Gamma = \rho^{-1}(x^0)$ подгрупа (*изотропна подгрупа* елемента x^0) која не зависи од фиксираног елемента x^0. Како је дејство и локално слободно, то је Γ је дискретан подскуп од $\mathbf{R}^{n-r}$, односно Γ је решетка.

Нека је $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ база од Γ дата лемом 1. Допунимо је векторима $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots,$ $\mathbf{e}_{n-r}$ до базе простора $\mathbf{R}^{n-r}$.

Посматрајмо $(n-r)$-димензиони реални векторски простор W са координатама $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r-k})$ у односу на базу $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$, заједно са природним пресликавањем

$$\pi : W \longrightarrow \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-r-k}, \qquad \pi(\varphi, \alpha) = (\varphi \pmod{2\pi}, \alpha).$$

Дефинишимо линеарни изоморфизам $A : W \to \mathbf{R}^{n-r}$ са $A(\mathbf{f}_i) = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n-r$ као и пресликавање $\tilde{A} : \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-r-k} \to \mathcal{P}_c$ тако да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^{n-r} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-r-k} & \xrightarrow{\tilde{A}} & P_c. \end{array}$$

Лако се проверава да је $\tilde{A}$ добро дефинисан дифеоморфизам. Како је P_c компактно, добијамо $k = n - r$, тј. P_c је дифеоморфно торусу $\mathbf{T}^{n-r}$.

Корак 3. Без умањена општости, можемо претпоставити је интеграл f_1 једнак Хамилтонијану h. Изразимо вектор $(1,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^{n-r}$ у бази $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-r}$:

$$(1,0,\ldots,0) = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \omega_{n-r} \mathbf{e}_{n-r}.$$

[3] Лево (десно) дејство групе $(G,*)$ на скуп M је додељивање пресликавања g^s скупа M сваком елементу $s \in G$ тако да је $g^e = Id_M$, где је e неутрал у G и $g^s \circ g^t = g^{s*t}$ $(g^s \circ g^t = g^{t*s})$, $s, t \in G$. Уколико је $(G,*)$ комутативна група, тада се дефиниције левог и десног дејства поклапају.

При пресликавању ρ, константном векторском пољу $(1,0,\dots,0)$ одговара Хамилтоново векторско поље $X_h = X_1$. Даље, из дефиниције $\tilde{A}$ добијамо да је у координатама $\varphi \pmod{2\pi}$, векторско поље X_1 константно и једнако $(\omega_1,\dots,\omega_{n-r})$. Тиме смо доказали линеаризацију (8) једначина (5). ∎

Напомена 1. Уколико су векторска поља $X_1,\dots,X_{n-r}$ наведена у доказу теореме комплетна, тада се услов компактности многострукости $\mathcal{P}_c$ може изузети. Ако $\mathcal{P}_c$ није компактно тада је оно дифеоморфно са $\mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-r-k}$ (за неко $k>0$) и могу се наћи координате $(\varphi_1,\dots,\varphi_k,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-r-k})$ на $\mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-r-k}$, такве да је динамика система задата линеарним једначинама $\dot\varphi_1 = \omega_1,\dots,\dot\varphi_k = \omega_k, \dot\alpha_1 = \beta_1,\dots,\dot\alpha_{n-r-k} = \beta_{n-r-k}, (\omega,\beta = const)$.

3. Хопфово раслојење

Хопфово раслојење сфере S^3 на кружнице је један од основних нетривијалних примера раслојења у геометрији и топологији. Раслојење има природан опис помоћу система два хармонијска осцилатора. Пођимо прво од система

$$\dot q_1 = p_1 = \frac{\partial h}{\partial p_1}, \quad \dot q_2 = p_2 = \frac{\partial h}{\partial p_2}, \quad \dot p_1 = -q_1 = \frac{\partial h}{\partial q_1}, \quad \dot p_2 = -\omega^2 q_2 = \frac{\partial h}{\partial q_2}, \tag{11}$$

где је $h = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2 + \omega^2 q_2^2 + p_2^2)$. У угловним координатама (φ_1,φ_2)

$$q_1 = \sqrt{2c_1}\cos(\varphi_1),\ p_1 = -\sqrt{2c_1}\sin(\varphi_1),\ q_2 = \frac{\sqrt{2c_2}}{\omega}\cos(\varphi_2),\ p_2 = -\sqrt{2c_2}\sin(\varphi_2) \tag{12}$$

на инваријантним торусима $f_1 = c_1,\ f_2 = c_2$, једначине кретања имају облик

$$\dot\varphi_1 = 1, \qquad \dot\varphi_2 = \omega,$$

где су интеграли $f_1 = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2)$, $f_2 = \frac{1}{2}(\omega^2 q_2^2 + p_2^2)$ редом енергија првог и другог осцилатора [Jo]. Уколико ω није рационалан број, тада су трајекторије на инваријантним торусима равномерно свуда густе [Jo]. То повлачи да не постоји допунски независни интеграл кретања и да систем није некомутативно интеграбилан. У супротном, ако $\omega \in \mathbf{Q}$, све трајекторије система су периодичне.

Од сада узимамо вредност параметра $\omega = 1$ (случај идентичних осцилатора). Тада су све трајекторије 2π-периодичне и систем има допунски интеграл, кога може представљати произвољна 2π-периодична функција разлике $\varphi_1 - \varphi_2$. На пример, како је $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$ из (12) добијамо трећи интеграл облика $(q_1 q_2 + p_1 p_2)\sqrt{f_1 f_2}$. Пошто је $\sqrt{f_1 f_2}$ такође интеграл, можемо узети интеграл:

$$m_1 = \frac{1}{2}(q_1 q_2 + p_1 p_2).$$

Вежбање 1. Нека је $m_2 = \frac{1}{2}(q_2 p_1 - p_2 q_1)$, $m_3 = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)$. Доказати:

$$\{m_1, f_1\} = \{f_2, m_1\} = m_2, \quad \{f_1, m_2\} = \{m_2, f_2\} = m_1, \quad \{f_1, f_2\} = 0, \tag{13}$$

$$\{m_1, m_2\} = m_3, \quad \{m_2, m_3\} = m_1, \quad \{m_3, m_1\} = m_2. \tag{14}$$

Приметимо да интеграл m_2 одговара функцији $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ као и да међу интегралима важи функционална релација $f_1 f_2 = m_3^2 + m_4^2$.

Систем (11) задовољава услове теореме 1 у односу на интеграле h, m_1, m_2 (поред Хамилтонијана h, можемо узети произвољна два независна интеграла).

Вежбање 2. Доказати да векторски простори кососиметричних 3×3 реалних матрица $so(3)$ и косохермитских 2×2 комплексних матрица трага нула ($su(2)$) (посматраних као реални векторски простор),

$$so(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\},\ su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & z \\ -\bar{z} & -ia \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C} \right\},$$

чине Лијеве алгебре у односу на уобичајен комутатор $[\cdot,\cdot]$ матрица. Показати изоморфизам Лијевих алгебри $(so(3), [\cdot,\cdot])$, $(su(2), [\cdot,\cdot])$, Еуклидког векторског простора са векторским множењем $(\mathbf{R}^3, \times)$ као и Лијеве алгебре генерисане функцијама m_1, m_2, m_3 са Пуасоновим заградама (14).

Фиксирани ниво енергије $h = E > 0$ задаје сферу S^3 полупречника $\sqrt{2E}$ у $\mathbf{R}^4$. Трајекторије система на S^3 задају раслојавање сфере на кружнице – *Хопфово раслојење.* Квоцијентни простор S^3/S^1 је дводимензиона сфера S^2. Пресликавање $\pi : S^3 \longrightarrow S^2$, такво да су инверзне слике $\pi^{-1}(x)$, $x \in S^2$ управо кружнице (трајекторије осцилатора) може се експлицитно описати на следећи начин:

$$\pi(q_1, q_2, p_1, p_2) = (m_1, m_2, m_3) = \frac{1}{2}\left(q_1 q_2 + p_1 p_2, q_2 p_1 - p_2 q_1, \tfrac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2 - q_1^2 - p_1^2)\right).$$

Наиме, како је

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = \frac{1}{4}(4 f_1 f_2 + f_1^2 - 2 f_1 f_2 + f_2^2) = \frac{1}{4}(f_1 + f_2)^2 = \frac{1}{4}h^2,$$

тачка $\pi(q_1, q_2, p_1, p_2)$ припада сфери $S^2 = \{\, x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{4}E^2 \,\}$, док из независности интеграла m_1, m_2, m_3 добијамо да су инверзне слике тачака сфере S^2 трајекторије система (11).

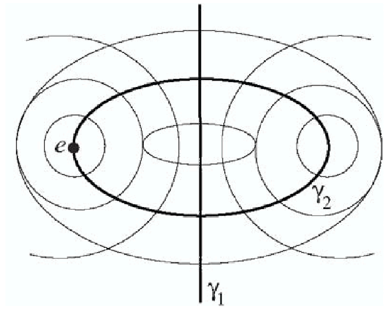
Поред раслојавања сфере S^3 на кружнице, имамо и (нејединствено) раслојавање на торусе задате као површи нивоа Хамилтонијана h и још једног интеграла. Посматрајмо интеграл m_3. На сфери S^3, функција m_3 узима вредности у интервалу $[-E/2, E/2]$, којима одговара разбијање сфере S^2 на антиподалне тачке (северни и јужни пол) и фамилију кружница (паралеле):

$$S^2 = \{(0,0,-E/2)\} \bigcup_{-\frac{E}{2} < c < \frac{E}{2}} S_c^1 \cup \{(0,0,E/2)\}, \quad S_c^1 = S^2 \cap \{x_3 = c\}.$$

При пресликавању π, инверзна слика кружнице S_c^1 је торус $T_c = \pi^{-1}(S_c^1)$ задат једначинама: $h = f_1 + f_2 = E$, $m_3 = \frac{1}{2}(f_2 - f_1) = c$, док су инверзне слике антиподалних тачака $(0,0,-E/2)$ и $(0,0,E/2)$, редом кружнице,

$$\gamma_1 : \quad f_1 = E,\ f_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \gamma_2 : \quad f_1 = 0,\ f_2 = E$$

на којима су функције h и m_3 зависне. Дакле имамо разбијање сфере S^3 на две кружнице и фамилију торуса: $S^3 = \gamma_1 \cup_{-\frac{E}{2}<c<\frac{E}{2}} T_c \cup \gamma_2$.



Слика 3. Хопфово раслојење

Та слика нам помаже да визуализујемо Хопфово раслојавање. Посматрајмо сферу S^3 као простор $\mathbf{R}^3$ са додатом бесконачо далеком тачком ∞ , при чему је кружница γ_1 права у $\mathbf{R}^3$ (која садржи и тачку ∞), док је γ_2 крузница која се добија ротацијом произвољне тачке e простора око γ_1. Торуси се добијају ротацијом око γ_1 кружница које леже у равни (γ_1, e) и садрже у својој унутрашости тачку e (погледати слику).

Одговарајуће додатно раслојавање торуса на кружнице које обилазе једанпут торусе по меридијанима и једанпут по паралелама, даје Хопфово раслојење.

Вежбање 3. Произвољне две кружнице из раслојења међусобно су међусобно *уланчане* (не могу се "раздвојити" без пресецања). То је очигледно за γ_1 и γ_2, као и произвољну кружницу са торуса T_c и γ_i. Покушајте дочарати међусобну уланчаност кружница на торусима.

ЛИТЕРАТУРА

[АР] В. И. Арнольд, *Математические методи классической механики*, Москва, Наука 1974. Превод на енглески: V.I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.

[БЈ] A. V. Bolsinov, B. Jovanović, *Non-commutative integrability, moment map and geodesic flows*, Annals of Global Analysis and Geometry **23**, no. 4, 305–322 (2003), arXiv: math-ph/0109031.

[Jo] Б. Јовановић, *Шта су то потпуно интеграбилни Хамилтонови системи?*, Настава математике **55**, 1–2 (2010).

[МФ] А. С. Мишченко, А. Т. Фоменко, *Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамилтонових систем*, Функцион. анализ прилож. **12**(2) (1978), 46–56.

[Не] Н. Н. Некхорошев, *О переменних действий – угол и их обобщения*, Тр. Моск. Мат. О.-ва. **26** (1972), 181–198.

Математички институт САНУ, Кнеза Михаила 36, 11000 Београд

E-mail: bozaj@mi.sanu.ac.rs