

Др Даниел А. Романо и др Милован Винчић

УВИД У СТУДЕНТСКО РАЗУМИЈЕВАЊЕ ПАРАЛЕЛНИХ И МИМОИЛАЗНИХ ПРАВИХ

Увод

Разумијевање (потенцијалне) бесконачности као и компетенције у методичким вјештинама у конструисања дидактичких ситуација у циљу ученичких прихватања геометријских појмова тачака, правих и равни у нижим разредима основне школе су врло пожељне код реализатора наставе математике у тим разредима. Већ у почецима наставе математике (у другом разреду основне школе) наставници се сусрећу са потребом да код ученика формирају знања о геометријским појмовима тачака, правих и равни. Ти појмови превазилазе оквире интуитивне геометрије и спадају у сферу која се индукује вишим интелектуалним активностима ученика уз присуство потреба о ученичком прихватању постојања сазнајног домена, домена геометрије, у којем се појмови конструирају (апстракција, не нужно првог реда). При конструисању овог школског знања геометрије код ученика нижих разреда основне школе, реализатори наставе математике би требало да располажу математичким знањима, вјештинама и способностима не само на знатно вишем нивоу него и на доста другачијем нивоу него су то школска знања из геометрије. Сем тога, требало би да реализатори наставе математике у тим разредима владају дидактичким способностима избора и/или дизајнирања геометријских задатака у циљу конструисања дидактичких ситуација у којима се реализују ученичка знања о поменутиим геометријским појмовима. Да би то успјешно реализовали, наставници математике би требало да су способни да разумију зашто се при тим процесима интеракција ученик-учитељ одвија управо на својствен и специфичан начин.

Студенти студијских програма за образовање учитеља обично полазе од својих интуитивних схватања појма бесконачности иако је, према већем броју наших и међународних истраживања, нису развили током основношколског и средњошколског образовања. Предавања која претпостављају да студенти располажу тим знањима почињу математичким курсевима на учитељским студијама. Овај недостатак разумијевања доста доприноси потешкоћама при овладавању математичким знањима неопходним реализаторима наставе математике – математичким знањима која се знатно разликују од школског знања математике

Рад је дио истраживачког пројекта „Установљавање образовних нивоа у математици“ који реализује Научно друштво математичара Бања Лука.

којим су овладали окончаваши претходно основну и средњу школу. Постоје истраживања (на примјер, [10]) у којима је изнесен став да је доста тешко одредити шта студенти подражумијевају под термином бесконачност. Такође, постоји више истраживања о школским знањима студената студијских програма за учитеље о разумијевању термина тачка, права и раван. Неријетко на те термине студенти гледају као на физичке објекте.

У овом тексту, уз уважавање савремених алата у истраживању математичког образовања у складу са књигама [1], [5], [8] и [19]¹ и/или у смислу презентираним у радовима [15] и [17] формирамо слутњу о студентском поимању бесконачности. (О истраживањима студентског поимања бесконачности у геометријском контексту погледати радове [2], [3], [6], [10], [11], [12], [13], [14], [20] и [21]. Сем тога анализирамо студентско разумијевање геометријских појмова правих, паралелних и мимоилазних правих како бисмо утврдили њихове методичке компетенције за конструисање знања код ученика нижих разреда основне школе при прелазу са интуитивног ка аналитичком приступу тим појмовима.

У овом чланку, када је у питању методологија примјењена при овом истраживању, водили смо превасходно рачуна о да дамо одговоре на слиједећа питања:

- Зашто смо изабрали управо актуелни фокус посматрања учитељских знања?
- Зашто је информација коју нудимо дизајнирана на изабрани начин?
- Зашто су друге алтернативе изостављене?
- Да ли смо увјерени да су подаци и анализе које нудимо релевантни?

Посматрани проблем

У једном од уџбеника за други разред деветогодишње основне школе у Републици Српској (Б. Чакрлија и П. Баковић: Математика 2; Завод за уџбенике и настава средства, Источно Сарајево 2009) појам права линија први пут се појављује на страници 18. Према организационој концепцији овог уџбеника, на праву линију гледа се као на објект који би ученици другог разреда требало да интуитивно препознају. На страници 23 истог уџбеника постоји цртеж и текст који се односи на тај цртеж: „Спој по двије тачке тако да праве линије прелазе преко тачака.“ Подсјетимо се сада шта о овом геометријском садржају пише у Наставном програму математике за други разред деветогодишње основне школе у БиХ:

- Наставни садржај: крива линија и права линија, појам праве и дужи.
- Ученик треба да упозна различите линије, фигуре, равни, геометријска тијела и њихова својства.
- Ученик треба да црта, уз помоћ лењира, дужи и праве, да прави разлику међу њима.

¹ То је највероватније најбоља и најобухватнија књига о истраживању математичког образовања као посебном домену научног знања.

- Ученик треба да зна да црта разне врсте линија: дуж, права линија, крива линија, . . .

У дијелу који се односи на дидактичка упутства пише: „Други основни појмови везани за програм су геометријски појмови. . . . Затим треба посветити пажњу разликовању линија, кривих од правих, као и отворених од затворених линија, . . . троугаоне, четвороугаоне линије, . . . “ Горњи текст нас увјерава да састављачи наставног програма математике за други разред деветогодишње основне школе у БиХ и нису имали намјеру да код ученика тог разреда буде конструисано знање које се односи на геометријски појам праве.

У једном од уџбеника за трећи разред основне школе (Д. Липовац: Математика 3; Завод за уџбенике и наставна средства, Источно Сарајево 2008) термин права линија појављује се први пут на страници 27 (задатак 2). У слиједећем задатку, задатку 3, пише: „Модел праве линије цртамо уз помоћ лењира.“ У том дијелу текста стоји (уоквирено): „Праву линију краће ћемо звати права.“

У једном од уџбеника за четврти разред основне школе (Д. Липовац: Математика 4, Завод за уџбенике и наставна средства, Источно Сарајево 2009) у теми „Тачка, полуправа, права и равна“ пише (страница 28, тачка 1): „Ако се дуж AB (уз помоћ лењира) неограничено продужи преко крајњих тачака, добије се права линија или права.“ На слиједећој страници, страници 29, стоји: „Шине на прузи можемо посматрати као двије праве које се налазе на истом одстојању једна од друге, тј. не сијеку се . . . За две праве исте равни кажемо да су паралелне ако немају заједничких тачака . . . “

С друге стране, у Наставном програму математике за четврти разред деветогодишње основне школе као циљеви наставе (који се односе на геометријске садржаје) математике наводе се:

(а) *Стицање знања*: експериментално моделирање праве и полуправе и цртање модела праве и полуправе;

(б) *Стицање вјештина и способности* разврставања, упоређивања, низања, слијеђења низа упута, просторног организовања и оријентације, визуелизације и визуелног груписања, процјењивања и критичког вредновања властитих резултата и њихово поређење са резултатима других, способност презентације података и преношења информација кроз различите облике рада, индуктивног мишљења, индуктивног аналогног закључивања, различити начини математичког изражавања и комуникације, и логичког и критичког мишљења;

(в) *Развијање позитивних вриједности и ставова*: уважавање аргументације у браћењу личних ставова и поштовања ставова других, колективног рада, позитивних особина личности, радовање туђем и личном успјеху, самопоуздање и самоактуелизација.

Субјекти овог истраживања били су студенти треће године једног факултета за образовање професора разредне наставе (учитеља) у Босни и Херцеговини. У оквиру интервјуа/тестирања о геометријским знањима студената интервјуисане популације, у оквирима пројекта „Утврђивање образовних нивоа у настави математике“, који реализује Научно друштво математичара Бања Лука, по-

ставили смо студентима проблем о међусобним односима основних геометријских појмова (објеката фамилије тачака, фамилије правих и фамилије равни). У овом прадијалном извјештају фокусирали смо се на студентско разумијевање појмова правих и њихових међусобних односа са посебним освртом на паралелне и мимоилазне праве.

Студентски одговори

Ниже наводимо одговоре студената класификоване у кластере истих или приближно истих одговора изостављајући кластер исправних одговора јер је само један студент ове интервјуисане популације понудио исправне одговоре на постављена питања о паралелним и мимоилазним правим:

- Паралелне праве су линије које стоје једна наспрам друге. Мимоилазне праве су праве које немају заједничку тачку.
- Пар паралелних правих су: (а) паралелне јер су наспрамне, (б) праве јер су бесконачне и с једне и с друге стране, (в) немају заједничких тачака. Пар мимоилазних правих мимоилазе се и немају заједничких тачака.
- Паралелне праве су праве које су паралелне и немају заједничких тачака. Мимоилазне праве су праве које немају заједничких тачака и мимоилазе се.
- Праве које су међусобно паралелне и међусобно се не додирују, а спајају се негде у бесконачности и називају се пар паралелних правих. Праве које су међусобно не спајају и исте су међусобно и не спајају се у бесконачности називају се пар мимоилазних правих.
- Пар паралелних равни можемо дефинисати као две паралелне равни истих дужина које су паралелне једна наспрам друге. Пар мимоилазних равни се могу дефинисати као две исте, једнаке или сличне равни које нису паралелне једна наспрам друге него се мимоилазе.
- Паралелне праве то су праве које се налазе једна наспрам другој. Мимоилазне праве су праве које нису једна поред друге, односно оне су мимоилазне.
- Паралелне праве су наспрамне, бесконачне су и са једне и са друге стране и имају заједничке тачке и при томе се не сијеку. Мимоилазне праве немају заједничке тачке при чему се мимоилазе и такође се не сијеку.
- Двије праве су паралелне онда и само онда када је њихова дужина потпуно паралелна и када стоје једна поред друге. Мимоилазне праве немају исти правац пружања, не иду у истом смијеру и не завршавају се на истом или приближним мјестима.

Наши циљеви истраживања су били:

- (1) установити студентско поимање бесконачности унутар геометријских знања;
- (2) установити студентско уважавања присуства логичких принципа искључења трећег и неконтрадикције при детерминисању међусобних односа тачака и правих и међусобних односа правих;
- (3) установљавање студентских дефиниција и/или ‘скоро-дефиниција’ паралелних правих и мимоилазних правих;

- (4) (индиректно) установити методичке компетенције интервјуисане популације за реализацију геометријских садржаја у нижим разредима основне школе;
- (5) наслутити (тј. формирати хипотезу) о студентском разумијевању зашто је сврсисходније знања о геометријским објектима у нижим разредима основне школе конструисати уз уважавање алата и технологија Теорије дидактичких ситуација умјесто традиционалног приступа настави геометрије у тим разредима.

Закључак

Анализирали смо студентске одговоре са слиједећих дидактичких гледишта²:

- на нивоу школске математике;
- на нивоу математичких знања неопходних реализаторина наставе математике;
- на нивоу методичких знања неопходних реализаторима наставе математике;
- на нивоу неопходног разумијевања процеса конструисања математичких знања код ученика нижих разреда основне школе.

Радије ћемо користити синтагму „даље развијати“ него глагол „образовати“ јер се, генерално говорећи, не слажемо да доминантни приступ математичком образовању у нашим основним школама треба да буде традиционални приступ. Ми преферирамо ‘Теорију дидактичких ситуација’, или, као алтернативу, ‘Теорију реалистичког математичког образовања’. При традиционалном приступу математичком образовању у реализацији наставе математике у нижим разредима основне школе некавалитетно уведени појмови праве, паралелних и мимоилазних правих производе не мали број потешкоћа у сагледавању потребних услова за остваривање разумијевања геометријских садржаја до нивоа I (по ван Хиелеовој класификацији). Реализатори наставе математике би требало да су свијесни да већ у другом разреду основне школе при упознавању ученика са појмом праве прелазе из Интуитивне геометрије – Геометрије I у суптилније разумијевање геометрије, тзв. Геометрију II³. Требало би да су свијесни да при конструисању знања о правој од ученика другог разреда се већ захтијева да прихватају постојање објеката који су резултат апстракција (не нужно првог реда). Мишљења смо да поступак упознавања ученика нижих разреда основе школе са појмовима тачке, праве и равни као апстрактних геометријских појмова треба постепено реализовати током наставе у другом, трећем и четвром разреду школе уз чврсте намјере да се код ученика формира когнитивна равна у којима су ти појмови и њихове међусобне односе кристално јасни. Разумијевања унутар те равни треба развијати свакако у ширем смислу и дубљем значењу од оног који је присутан у обавезним школским уџбеницима, а најмање до нивоа који је (имплицитно) меже дедуковати из циљева наставе математике у наставним програмима за други, трећи и четврти разред основне школе.

² О епистемиолошким сличностима и разликама домена ‘школска математика’, ‘математичка знања неопходна реализаторима наставе математике’, ‘методика наставе математике’ и ‘проблематика математичког образовања’ погледати, на примјер, у тексту [17].

³ О доменима Геометрија I и Геометрија II погледати у чланку [16]

Студентско разумијевање (потенцијалне) бесконачности (упоредити са резултатима у раду [11]) треба прихватити уз доста суздржаности. Стога, нисмо сигурни да су студенти интервјуисане популације овладали вјештинама конструкција знања о апстрактним појмовима правих, паралелних и мимоилазних правих код ученика нижих разреда основе школе. Ово сугерише да би требало да школски ауторитети пронађу бар искуствену мјеру којом би се досегнули сазнајни циљеви наставе математике о геометријским садржајима о којима је ријеч. Чини нам се да је моменат кад би требало да читаоце овог извјештаја упутимо на истраживање [6] у којем је утврђено да је интуиција о бесконачности релативно стабилна код дјецe од дванаесте године па надаље. Међутим, ако тестирани студенти студијског програма за образовање учитеља не располажу стабилним концептима интуитивног поимања бесконачности, како очекивати да ће бити у могућности да код ученика у нижим разредима основне школе конструишу знања о апстрактним појмовима праве и равни који подразумевају прихватање потенцијалне бесконачности?

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Biehler, R.W. Schol, R. Straser and B.Winkelmann, *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994.
2. P. Boero, N. Douek and R. Garuti, *Children's concepts of infinity of numbers in a grade 5 classroom discussion context*, In: Pateman, N.A., Dougherty, B.J., Zilliox, J. (Eds), Proceedings of PME 27 (2003), University of Hawaii, Honolulu, Vol. 2, 121–128.
3. T. Brown, L. Jones and T. Bibby, *Identifying with mathematics in initial teacher training*, In: M. Walshaw (ed.) *Mathematics Education within the Postmodern; The International Perspectives on Mathematics Education Series*, IAP, Greenwich 2004.
4. G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Dover Publications, New York, 1955.
5. P. Ernest, B. Greer and B. Sriraman, *Critical Issues in Mathematics Education*, In: The International Perspectives on mathematics Education Series, IAP, Greenwich 2009.
6. E. Fischbein, D. Tirosh and P. Hess, *The intuition of infinity*, Educ. Studies in Mathematics, **10** (1979), 3–40.
7. E. Fischbein, *Tacit models and infinity*, Educational Studies in Mathematics, **48** (2001), 309–329.
8. S. Goodchild and L. Englysh, *Researching mathematics classrooms*, In: The International Perspectives on Mathematics Education Series, IAP, Greenwich 2005.
9. D. Jirotková and G. Littler, *Insights into pupil's structures of mathematical thinking through oral communication*, In: Proceedings of PME 26 (2002), Norwich UK.
10. D. Jirotková and G. Littler, *Student's concept of infinity in the context of a simple geometrical construct*, In: Pateman, N.A., Dougherty, B.J., Zilliox, J. (Eds), Proceedings of PME 27 (2003), Univ. of Hawaii, Honolulu, **3**, 123–132.
11. J. Monaghan, *Adolescents' understanding of limits and infinity*, Unpublished PhD thesis. Mathematical Education Research Centre, 1986, Warwick University, UK.
12. J. Monaghan, *Young peoples' ideas of infinity*, Educational Studies in Mathematics, **48** (2001), 239–257.
13. L.E. Moreno and G. Waldegg, *The conceptual evolution of actual infinity*, Educational Studies in Mathematics **22** (1991), 211–231.
14. R.E. Nunes, *Big and small infinities: Psychocognitive aspects*, Proc. of PME **17** (1993), Tsukuba, Japan, Vol. II, 121–128.
15. Д.А. Романо, *Истраживање математичког образовања*, ИМО, **I** (2009), 1, 1--10.

16. Д.А. Романо, *О геометријском мишљењу*, Настава математике (Београд), **LIV**, 2–3 (2009), 1–11
17. Д.А. Романо, *Математика, методика математике и истраживање математичког образовања – три сродна а тако различита домена*. ИМО, **II** (2010), 2, 3–10.
18. Д.А. Романо, В. Тодић и М. Винчић, *Једно утврђивање геометријских компетенција студената учитељског програма*, ИМО, **II** (2010), 3, 33–45.
19. A. Serpinska and J. Kilpatrick, *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.
20. D. Tall and D. Tirosh, *Infinity, the never ending struggle*, Educational Studies in Mathematics, **48** (2001), 129–136.
21. D. Tirosh and P. Tsamir, *Comparing infinite sets: intuitions and representations*, In: Proceedings of PME **18** (1994), Lisbon, Portugal, **IV**, 345–352.
22. P. Vopenka, *Rozpravy s geometri*, Panorama, Praha, 1989.

Д.А. Романо, Педагошки факултет, Универзитет у Источном Сарајеву, 76300 Бијељина, Семберских ратара бб, Босна и Херцеговина

E-mail: bato49@hotmail.com

М.Винчић, Машински факултет, Универзитет у Бањој Луци, 78000 Бања Лука, Војводе Степе Степановића 75, Босна и Херцеговина

E-mail: vincicm@yahoo.com

ОБАВЕШТЕЊЕ

РЕПУБЛИЧКИ СЕМИНАРИ И GEOGEBRA КОНФЕРЕНЦИЈА 2011

Традиционални зимски **Републички семинари Друштва математичара Србије**:

1. Унапређивање наставе математике у старијим разредима основне школе,
2. Унапређивање наставе математике у средњим школама,
3. Унапређивање наставе рачунарства у основним и средњим школама

одржаће се на Природно-математичком факултету у Новом Саду 14. и 15. јануара 2011. године. Семинари су акредитовани код Завода за унапређивање образовања и васпитања као **обавезни**, под бројевима **071**, **073** и **124**.

Детаљна обавештења о садржајима семинара и начину пријављивања биће достављена свим школама и објављена на сајту Друштва математичара

www.dms.org.rs

У Новом саду ће се од 15–17. јануара одржати и **GeoGebra конференција 2011** о коришћењу овог бесплатног софтверског пакета који је веома погодан за наставу математике. Програми ова два скупа биће координисани и биће омогућено учесницима да прате и један и други. Ближа обавештења могу се добити преко сајта

<http://sites.dmi.rs/events/2011/gcse/>