НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНИМ И СРЕДЊИМ ШКОЛАМА

Др Шефкет Арсланагић

О СИМЕТРАЛАМА УГЛОВА ТРОУГЛА

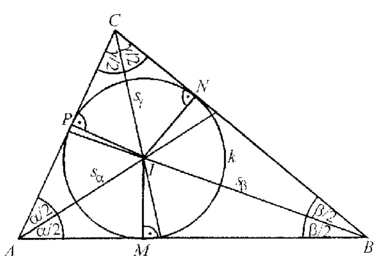
У овом нешто обимнијем чланку даћемо више релевантних чињеница о симетралама унутрашњих углова троугла (дефиниција, важне теореме, једнакости, неједнакости итд). Први дио чланка подесан је за реализацију наставе у основној школи (евентуално у додатној настави), а други је намењен настави у средњој школи[1].

Дефиниција 1. Симетрала (бисектриса) унутрашњег угла троугла је права која полови тај угао.

Теорема 1. *Симетрале унутрашњих иглова троугла сијеку се у једној тачки која је центар уписане кружнице у тај троугао.*

Доказ. Нека су s_α, s_β, s_γ симетрале унутрашњих углова α, β, γ троугла ABC. Треба доказати да је $s_\alpha \cap s_\beta \cap \sigma_\gamma = \{I\}$, гдје је I центар уписане кружнице k у $\triangle ABC$.

Нека се симетрале s_α и s_β сијеку у тачки I. Доказаћемо да такође $I \in s_\gamma$. Пошто $I \in s_\alpha$, то важи $\overline{IM} = \overline{IP}$ (јер свака тачка на симетрали угла једнако је удаљена од кракова угла – слиједи из чињенице да је $\triangle AIM \cong \triangle AIP$ (УСУ), сл. 1). Даље, пошто $I \in s_\beta$, то слиједи да је $\overline{IM} = \overline{IN}$. Сада из једнакости $\overline{IM} = \overline{IP}$ и $\overline{IM} = \overline{IN}$ слиједи да је $\overline{IN} = \overline{IP}$, што значи да тачка $I \in s_\gamma$, тј. $s_\alpha \cap s_\beta \cap \sigma_\gamma = \{I\}$, што је требало доказати. Стављајући да је $r = \overline{IM} = \overline{IN} = \overline{IP}$, слиједи да је тачка I центар кружнице $k(I, r)$ уписане у троугао ABC.



Сл. 1

Сада ћемо формулисати и доказати сљедећу важну теорему.

Теорема 2. *Симетрала унутрашњег угла троугла дијели наспрамну страницу у односу других двију страница.*

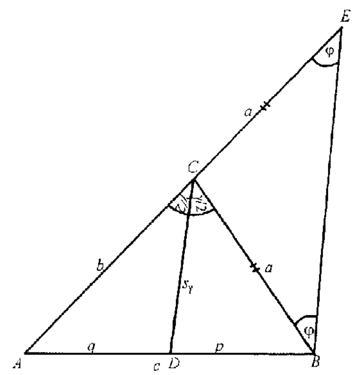
[1] Да би се сачувала целовитост излагања, чланак објављујемо као заједнички за рубрике "Настава у основној школи" и „Настава у средњој школи" (*Редакција*).

Даћемо три доказа ове теореме.

Доказ 1 (помоћу Талесове тероеме). Нека у $\triangle ABC$ симетрала s_γ угла $\angle ACB = \gamma$ сијече странницу AB у тачки D, сл. 2. Продужимо страницу AC преко тјемена C до тачке E тако да је $\overline{CE} = \overline{CB} = a$. Нека су у једнакокраком троуглу BCE углови $\angle CBE = \angle CEB = \varphi$. По теореми о спољашњем углу, у троуглу BCE је $2\varphi = \gamma$, а одавде $\varphi = \frac{1}{2}\gamma$, тј. $\angle CBE = \angle CEB = \frac{1}{2}\gamma$, што значи да је $BE \parallel CD$. Сада на основу Талесове теореме добијамо да је $\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AB}$, а одатле

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}+\overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}+\overline{BD}}, \quad \text{тј.}$$

$$\frac{\overline{AC}+\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}+\overline{BD}}{\overline{AD}}.$$



Сл. 2

Одавде је $1 + \dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = 1 + \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, те најзад због $\overline{CE} = \overline{BC}$:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}, \quad \text{тј.} \quad \frac{p}{q} = \frac{a}{b}$$

(гдје је $\overline{BD} = p$, $\overline{AD} = q$), што је и требало доказати.

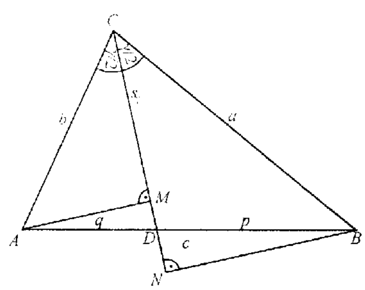
Доказ 2 (помоћу сличности троуглова). Нека симетрала s_γ сијече страницу $\triangle ABC$ у тачки D, сл. 3. Означимо са M и N подножја нормала из тјемена A и B на праву CD. Правоугли троуглови $\triangle AMD$ и $\triangle BND$ су слични (јер $\angle ADM = \angle BDN$ (унакрсни)). Из сличности ових троуглова слиједи да је

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}. \tag{1}$$

Такође, правоугли троуглови $\triangle AMC$ и $\triangle BNC$ су слични (јер је $\angle ACM = \angle BCN = \frac{1}{2}\gamma$), па имамо да је

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}. \tag{2}$$

Сада из (1) и (2) добијамо $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$, тј. $\dfrac{q}{p} = \dfrac{b}{a}$, q.e.d.



Сл. 3

Доказ 3 (помоћу површина троуглова). Нека је $\overline{CD} = s_\gamma$. Конструишимо нормале $DM \perp BC$ и $DN \perp AC$, сл. 4. Нека је даље $\overline{CC_1} = h_c$ ($CC_1 \perp AB$). Сада имамо

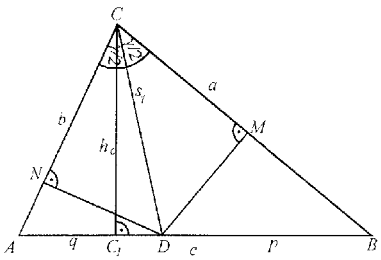
$$P_{\triangle ACD} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{CC_1}}{2} \quad \text{и} \quad P_{\triangle ACD} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{DN}}{2},$$

а одавде $\overline{AD}\cdot\overline{CC_1}=\overline{AC}\cdot\overline{DN}$, тј.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DN}}{\overline{CC_1}}. \qquad (3)$$

Слично, посматрајући троугао BCD добијамо да је

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{CC_1}}. \qquad (4)$$



Сл. 4

Но, како $D\in s_\gamma$, то је $\overline{DM}=\overline{DN}$, па из (3) и (4) добијамо да је

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}},\quad \text{тј.}\quad \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},\quad \text{дакле}\quad \frac{q}{p}=\frac{b}{a}.$$

Примјер 1. Троугао је задат дужинама својих страница a, b и c. Одредити односе у којима центар уписане кружнице I дијели симетрале углова тог троугла.

Рјешење. Примјењујући претходну теорему на $\triangle ABC$ добијамо ($s_\beta\cap AC=\{B_1\}$, сл. 5):

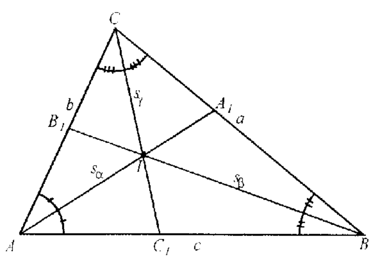
$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{a}{c},$$

а одавде због $\overline{AB_1}+\overline{CB_1}=b$,

$$\frac{\overline{B_1C}}{b-\overline{B_1C}}=\frac{a}{c},\quad \text{тј.}\quad \overline{B_1C}=\frac{ab}{a+c}. \qquad (5)$$

Примјењујући претходну теорему на $\triangle BCB_1$, добијамо

$$\frac{\overline{B_1I}}{\overline{BI}}=\frac{\overline{B_1C}}{\overline{BC}}. \qquad (6)$$



Сл. 5

Сада из (5) и (6) слиједи $\dfrac{\overline{B_1I}}{\overline{BI}}=\dfrac{b}{a+c}$. Аналогно добијамо да тачка I дијели симетрале s_α и s_γ у односима

$$\frac{\overline{A_1I}}{\overline{AI}}=\frac{a}{b+c}\quad \text{и}\quad \frac{\overline{C_1I}}{\overline{CI}}=\frac{c}{a+b}.$$

Задатак 1. Нека се симетрале AA_1, BB_1 и CC_1 унутрашњих углова α, β и γ троугла ABC сијеку у тачки I. Доказати да вриједи:

а) $\dfrac{\overline{IA_1}}{\overline{AA_1}}+\dfrac{\overline{IB_1}}{\overline{BB_1}}+\dfrac{\overline{IC_1}}{\overline{CC_1}}=1$;   б) $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{AA_1}}+\dfrac{\overline{IB}}{\overline{BB_1}}+\dfrac{\overline{IC}}{\overline{CC_1}}=2$;

в) $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IA_1}}+\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IB_1}}+\dfrac{\overline{IC}}{\overline{IC_1}}>3$;   г) $\dfrac{1}{4}<\dfrac{\overline{IA}}{\overline{AA_1}}\cdot\dfrac{\overline{IB}}{\overline{BB_1}}\cdot\dfrac{\overline{IC}}{\overline{CC_1}}\leqslant\dfrac{8}{27}$;

д) $\overline{IB_1} \cdot \overline{IC_1} < \dfrac{1}{4}\overline{BB_1} \cdot \overline{CC_1} < \overline{IB} \cdot \overline{IC}$.

Сада ћемо доказати обрат (конверзију) теореме 2.

Теорема 3. *Ако права повучена кроз једно тјеме троугла ABC дијели наспрамну страницу у односу дужина других двију страница (при чему сваки од тих дијелова са одговарајућом страницом има заједничко тјеме), тада је та права симетрала тог угла троугла.*

Доказ. Нека права p повучена кроз тјеме C троугла ABC дијели угао при томе тјемену на два дијела (углови $\angle ACD = \gamma_2$ и $\angle BCD = \gamma_1$, гдје је $\{D\} = p \cap AB$), сл. 6. Нека је $\overline{AD} = m$ и $\overline{BD} = n$. По претпоставци теореме је

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{a}. \tag{7}$$

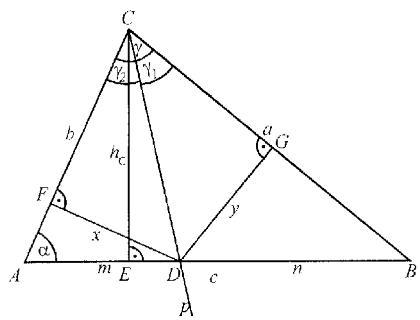
Треба, дакле, доказати да је $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}\gamma$, гдје је $\gamma = \angle ACB$. Довољно је доказати уствари да је тачка D једнако удаљена од кракова угла ACB, тј. да је $x = \overline{DF} = \overline{DG} = y$.

Нека је тачка E подножје висине из тјемена C троугла ABC, тј. $h_c = \overline{CE}$ ($CE \perp AB$). Сада су троуглови $\triangle ADF$ и $\triangle ACE$ слични (јер су правоугли и угао α код тјемена A им је заједнички), те имамо $\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$, тј.

$$\frac{x}{m} = \frac{h_c}{b}. \tag{8}$$

Исто тако из сличности троуглова $\triangle BDG$ и $\triangle BCE$ добијамо да је

$$\frac{y}{n} = \frac{h_c}{a}. \tag{9}$$



Сл. 6

Сада из (7), (8) и (9) слиједи

$$\frac{x}{y} = \frac{\dfrac{mh_c}{b}}{\dfrac{nh_c}{a}} = \frac{am}{bn} = 1,$$

а одавде $x = y$, што значи да је дуж CD симетрала угла $\angle ACB = \gamma$.

Сада ћемо прећи на израчунавањедужина симетрала s_α, s_β и s_γ унутрашњих углова троугла ABC.

Теорема 4. *Дужина симетрале угла $\angle ACB = \gamma$ троугла ABC једнака је*

$$s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}, \tag{10}$$

гдје је $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Даћемо опет три разна доказа теореме 4.

Доказ 1 (помоћу косинусне теореме). Нека је $\overline{CC_1} = s_\gamma$ симетрала унутрашњег угла γ троугла ABC, сл. 7. На основу косинусне теореме добијамо из троуглова $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$:

$$q^2 = b^2 + s_\gamma^2 - 2bs_\gamma \cos\frac{\gamma}{2}, \quad p^2 = a^2 + s_\gamma^2 - 2as_\gamma \cos\frac{\gamma}{2},$$

а одавде $\dfrac{b^2 + s_\gamma^2 - q^2}{b} = \dfrac{a^2 + s_\gamma^2 - p^2}{a}$, одакле рјешавајући по s_γ добијамо

$$s_\gamma^2 = \frac{aq^2 - bp^2 + a^2b - ab^2}{a-b}.$$

Одавде због $p = \dfrac{ac}{a+b}$ и $q = \dfrac{bc}{a+b}$ (ово смо доказали у примјеру 1):

$$\begin{aligned} s_\gamma^2 &= \frac{1}{a-b}\left[\frac{ab^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{a^2bc^2}{(a+b)^2} + ab(a-b)\right] = \frac{1}{a-b}\left[\frac{-abc^2(a-b)}{(a+b)^2} + ab(a-b)\right] \\ &= \frac{ab}{(a+b)^2}[(a+b)^2 - c^2] = \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c), \end{aligned}$$

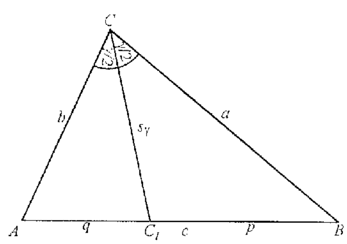
тј. $s_\gamma = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)}$, q.e.d.

Доказ 2. (Помоћу површина троуглова). Очигледно имамо $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ACC_1} + P_{\triangle BCC_1}$ тј.

$$\frac{ab}{2}\sin\gamma = \frac{bs_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{as_\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

а одавде, због $\sin\gamma = 2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, $2ab\cos\dfrac{\gamma}{2} = (a+b)s_\gamma$, и

$$s_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{11}$$



Сл. 7

Образац (11) се често налази у литератури и користи у раду. Из њега се након уврштавања

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} \quad \text{као и} \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

након сређивања добија формула (10).

Доказ 3 (помоћу Талесове теореме и тригонометрије правоуглог троугла). Овај доказ је релативно кратак и ефектан. Повуцимо праву p кроз тјеме B троугла ABC која је паралелна симетрали CC_1 угла γ, тј. $p \parallel CC_1$, и нека је $\{D\} = p \cap AC$, сл. 8. Пошто је сада $\angle ACC_1 = \angle CDB$, те $\angle BCC_1 = \angle CBD$, то је $\angle CDB = \angle CBD = \dfrac{\gamma}{2}$, па је троугао BCD једнакокрак.

Сада на основу Талесове теореме добијамо

$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}},$$

а одавде $\overline{CC_1} = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AC}+\overline{CD}}$, тј.

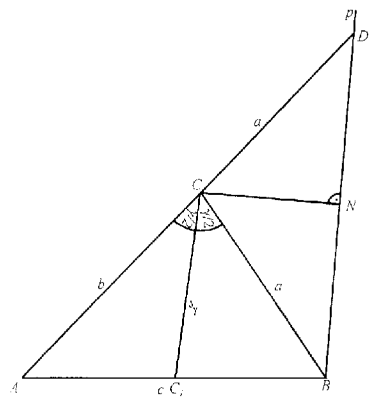
$$\overline{CC_1} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AC}+\overline{BC}}, \tag{12}$$

јер је троугао BCD једнакокрак. Нека је CN висина тог троугла. Тада је из правоуглог троугла CDN:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\angle CDN = \frac{\overline{DN}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{2\,\overline{BC}},$$

а одавде

$$\overline{BD} = 2\,\overline{BC}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{13}$$



Сл. 8

Сада из (12) и (13) добијамо

$$s_\gamma = \overline{CC_1} = \frac{2\,\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}+\overline{BC}}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2},$$

што је формула (11) из које слиједи тражени образац (10).

Аналогно добијамо да је

$$s_\beta = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2} \quad \text{и} \quad s_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Користећи ове обрасце сада можемо доказати познату *Штајнерову теорему*[2], која гласи

Теорема 5. *Ако су дужине симетрала два угла троугла једнаке, троугао је једнакокрак.*

Доказ. Једнакост $s_\alpha = s_\beta$ еквивалентна је редом следећим:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{s(s-b)}\\
&\qquad\iff \frac{\sqrt{b(s-a)}}{b+c} = \frac{\sqrt{a(s-b)}}{a+c}\\
&\qquad\iff (a+c)^2\cdot b(s-a) = (b+c)^2\cdot a(s-b)\\
&\qquad\iff \frac{b}{2}(a+c)^2(b+c-a) = \frac{a}{2}(b+c)^2(a+c-b)
\end{aligned}$$

[2] J. Steiner (1796–1863), швајцарски математичар

$$\begin{aligned}
&\iff b(a+c)^2(b+c) - ab(a+c)^2 = a(b+c)^2(a+c) - ab(b+c)^2\\
&\iff ab[(b+c)^2 - (a+c)^2] + (b+c)(a+c)[b(a+c) - a(b+c)] = 0\\
&\iff ab(a+b+2c)(b-a) + c(b+c)(a+c)(b-a) = 0\\
&\iff (b-a)[ab(a+b+2c) + c(b+c)(a+c)] = 0,
\end{aligned}$$

а последње је могуће само ако је $a = b$ (јер је израз у угластој загради позитиван). Дакле, троугао ABC је једнакокрак.

Напомена. Важно је истаћи да чисто геометријски доказ Штајнерове теореме није нимало лак. У књизи [1] је дато неколико разних доказа ове теореме.

Сада ћемо доказати више неједнакости користећи обрасце за s_α, s_β и s_γ.

Примјетимо најприје да се директном примјеном неједнакости троугла на троуглове ACC_1 И BCC_1 (сл. 7) може извести неједнакост $s_\gamma < s$. Из одговарајућих неједнакости за s_α и s_β слиједи да у сваком троугла важи

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 3s,$$

гдје је $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Примјеном изведених образаца за симетрале углова доказаћемо јачу неједнакост.

Неједнакост 1. У сваком троуглу важи

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma < 2s. \tag{14}$$

Доказ. На основу неједнакости $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, односно $\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leqslant 1$, добијамо из (10) да је

$$s_\gamma = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{s(s-c)} \leqslant \sqrt{s(s-c)}. \tag{15}$$

Даље, на основу неједнакости $G \leqslant A$ имамо

$$\sqrt{s(s-c)} < \frac{s+s-c}{2} = \frac{a+b}{2}. \tag{16}$$

(Овдје вриједи строга неједнакост јер је $s \neq s-c$). Аналогно добијамо неједнакости

$$s_\alpha \leqslant \sqrt{s(s-a)} < \frac{b+c}{2} \quad \text{и} \quad s_\beta \leqslant \sqrt{s(s-b)} < \frac{c+a}{2}.$$

Након сабирања неједнакости (15) и (16) са овим неједнакостима добијамо

$$s_\alpha + s_\beta + s_\gamma \leqslant \sqrt{s}(\sqrt{s-a} + \sqrt{s-b} + \sqrt{s-c}) < 2s,$$

што је нејднакост коју доказујемо.

Неједнакост (15) има неколико интересантних посљедица.

Посљедица 1. $s_\alpha s_\beta s_\gamma \leqslant rs^2$.

Доказ. Имамо

$$\begin{aligned}
s_\alpha s_\beta s_\gamma &\leqslant \sqrt{s(s-a)}\sqrt{s(s-b)}\sqrt{s(s-c)}\\
&= s\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s\cdot P = s\cdot rs = rs^2, \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Једнакост вриједи ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Посљедица 2. $s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \leqslant s^2$.

Доказ. Имамо $s_\alpha^2 \leqslant s(s-a)$, $s_\beta^2 \leqslant s(s-b)$ и $s_\gamma^2 \leqslant s(s-c)$, а одавде након сабирања

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \leqslant s(s-a+s-b+s-c) = s^2 \quad \text{q.e.d.}$$

Једнакост вриједи ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Посљедица 3. $s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma \leqslant s^2$.

Доказ. Имамо

$$\begin{aligned}
&s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\
&\quad \leqslant \sqrt{s(s-a)}\sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-b)}\sqrt{s(s-c)} + \sqrt{s(s-a)}\sqrt{s(s-c)} \\
&\quad = s(\sqrt{(s-a)(s-b)} + \sqrt{(s-b)(s-c)} + \sqrt{(s-a)(s-c)}) \\
&\quad \overset{(G-A)}{\leqslant} s\left(\frac{s-a+s-b}{2} + \frac{s-b+s-c}{2} + \frac{s-a+s-c}{2}\right) = s^2 \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Једнакост вриједи ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Неједнакост 2. Важи неједнакост

$$s_\gamma \leqslant t_c, \tag{17}$$

гдје је s_γ симетрала унутрашњег угла γ троугла ABC, а t_c тежишна линија из тјемена C тог троугла.

Доказ. Најприје ћемо доказати једну помоћну неједнакост која гласи

$$\frac{t_c}{s_\gamma} \geqslant \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}. \tag{18}$$

Имамо

$$\left(\frac{t_c}{s_\gamma}\right)^2 = \frac{\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)}{\frac{ab}{(a+b)^2}[(a+b)^2-c^2]} = \frac{(a+b)^2}{4ab} \cdot \frac{2a^2+2b^2-c^2}{(a+b)^2-c^2}. \tag{19}$$

Доказаћемо да је

$$\frac{2a^2+2b^2-c^2}{(a+b)^2-c^2} \geqslant 1. \tag{20}$$

Та неједнакост је редом еквивалентна сљедећим: $2a^2+2b^2-c^2 \geqslant (a+b)^2-c^2$, $a^2+b^2-2ab \geqslant 0$, $(a-b)^2 \geqslant 0$, а ова посљедња је увијек тачна. Сада из неједнакости (19) и (20) слиједи да је

$$\left(\frac{t_c}{s_\gamma}\right)^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}, \quad \text{а одавде} \quad \frac{t_c}{s_\gamma} \geqslant \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Једнакост вриједи у случају када је $a = b$.

Из А-Г неједнакости слиједи $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, тј. $\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}} \geqslant 1$, што заједно с доказаном неједнакошћу (18) даје неједнакост (17) коју доказујемо.

Користећи аналогне неједнакости $s_\alpha \leqslant t_a$ и $s_\beta \leqslant t_b$ добијамо и сљедеће неједнакости:

$$\begin{aligned} \frac{t_a}{s_\alpha}+\frac{t_b}{s_\beta}+\frac{t_c}{s_\gamma} &\geqslant 3, \\ \frac{s_\alpha}{t_a}+\frac{s_\beta}{t_b}+\frac{s_\gamma}{t_c} &\leqslant 3, \\ s_\alpha+s_\beta+s_\gamma &\leqslant t_a+t_b+t_c. \end{aligned}$$

Једнакост вриједи у посљедње три неједнакости ако и само ако је $a=b=c$, тј. за једнакостранични троугао.

Неједнакост 3. У троуглу важи неједнакост

$$\frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2} \geqslant \frac{9}{s^2}. \tag{21}$$

Доказ. Из неједнакости

$$s_\alpha \leqslant \sqrt{s(s-a)}, \quad s_\beta \leqslant \sqrt{s(s-b)}, \quad s_\gamma \leqslant \sqrt{s(s-c)} \tag{22}$$

добијамо

$$\frac{1}{s_\alpha^2} \geqslant \frac{1}{s(s-a)}, \quad \frac{1}{s_\beta^2} \geqslant \frac{1}{s(s-b)}, \quad \frac{1}{s_\gamma^2} \geqslant \frac{1}{s(s-c)}.$$

Након сабирања ових неједнакости слиједи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2} &\geqslant \frac{1}{s(s-a)}+\frac{1}{s(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)} \\ &= \frac{1}{s}\cdot\frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ac}{P^2}. \end{aligned}$$

Одавде, због чињенице да је $a+b+c=2s$, $P=rs$, $ab+bc+ac=r^2+s^2+4Rr$, слиједи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_\alpha^2}+\frac{1}{s_\beta^2}+\frac{1}{s_\gamma^2} &\geqslant \frac{3s^2-4s^2+r^2+s^2+4Rr}{r^2s^2} \\ &= \frac{r^2+4Rr}{r^2s^2} \quad (\text{због Ојлерове неједнакости } R \geqslant 2r) \\ &\geqslant \frac{r^2+8r^2}{r^2s^2} = \frac{9}{s^2}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Једнакост у (21) важи ако и само ако је у питању једнакостранични троугао.

Неједнакост 4. У троуглу важи неједнакост

$$\frac{s_\alpha}{a}+\frac{s_\beta}{b}+\frac{s_\gamma}{c}\leqslant\frac{s}{2r}. \tag{23}$$

Доказ. Користећи поново неједнакости (22), као и обрасце за површину троугла $P=\dfrac{ah_a}{2}=\dfrac{bh_b}{2}=\dfrac{ch_c}{2}$, те чињеницу да је $h_a\leqslant s_\alpha$, $h_b\leqslant s_\beta$ и $h_c\leqslant s_\gamma$, добијамо:

$$\begin{aligned}\frac{s_\alpha}{a}+\frac{s_\beta}{b}+\frac{s_\gamma}{c}&=\frac{s_\alpha h_a}{2P}+\frac{s_\beta h_b}{2P}+\frac{s_\gamma h_c}{2P}\leqslant\frac{1}{2P}(s_\alpha^2+s_\beta^2+s_\gamma^2)\\&\leqslant\frac{1}{2rs}[s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)]=\frac{1}{2r}[3s-(a+b+c)]=\frac{s}{2r}.\end{aligned}$$

Једнакост вриједи у (23) ако и само ако је $a=b=c$, тј. ако је троугао једнакостраничан.

Препоручујемо да се покушају ријешити сљедећи задаци:

Задатак 2. Доказати да у троуглу вриједи неједнакост $s_\alpha^2+s_\beta^2+s_\gamma^2\leqslant 3P\sqrt{3}$.

Задатак 3. Доказати да у троуглу вриједи неједнакост

$$s_\alpha^2s_\beta^2+s_\beta^2s_\gamma^2+s_\alpha^2s_\gamma^2\leqslant rs^2(4R+r).$$

Задатак 4. Ако је у троуглу $\alpha<\gamma$, тада је $s_\alpha>s_\gamma$. Доказати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o, Sarajevo, 2009.
3. O. Bottema & oth., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1969.
4. A. Marić, *Trokut*, Element, Zagreb, 2007.
5. D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-Londodn, 1989.
6. D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

Univerzitet u Sarajevu, Prirodno-matematički fakultet, Zmaja od Bosne 35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina

E-mail: `asefket@pmf.unsa.ba`

Једна исправка. У чланку Ш. Арсланагић, А. Муминагић: *Једна занимљива једнакост у троуглу и њене посљедице*, Настава математике **54**, 2–3, 2009, на страни 23 на три места (у издвојеним формулама) је грешком откуцан знак $\leqslant$, а треба $\geqslant$. Молимо читаоце за извињење.