Др Владимир Јанковић

РЕЗОЛВЕНТА ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

0. Увод

Нека је

$$\dot{x} = A(t)x$$

хомогена линеарна диференцијална једначина, где је $A(t)$ непрекидна операторска функција дефинисана на интервалу T, која узима вредности из простора $L(R^n; R^n)$. Под резолвентом ове диференцијалне једначине подразумева се операторска функција $R(t,\tau)$, дефинисана на квадрату $T \times T$, која задовољава услове

$$R_t(t,\tau) = A(t) \circ R(t,\tau), \quad R(\tau,\tau) = I,$$

где је $I \in L(R^n; R^n)$ идентични оператор. Резолвента је на овај начин дефинисана у књигама [1] и [2]. Показало се да је резолвента веома корисна при изучавању општег решења линеарне диференцијалне једначине, како у хомогеном случају претходно датом, тако и у општем случају.

Резолвента је веома блиска фундаменталној матрици, која се чешће од ње појављује у уџбеницима обичних диференцијалних једначина: за фиксирано τ резолвента $R(t,\tau)$ је фундаментална матрица; ако је $M(t)$ фундаментална матрица, онда је $R(t,\tau) = M(t)M(\tau)^{-1}$ резолвента. (Овде се линеарни оператор из $L(R^n; R^n)$, како се то често ради, идентификује са квадратном матрицом реда n.) Зато није чудно што се резолвента понекад назива фундаменталном матрицом, као на пример у књизи [3].

Једна од предности резолвенте у односу на фундаменталну матрицу је у томе што се резолвента може разматрати и у случају када се изучавају линеарне диференцијалне једначине у Банаховим просторима, а не само у R^n.

Овде ћемо показати везу између појмова резолвенте и Кошијеве функције о којој је било речи у чланку [4]. На крају ћемо показати како се помоћу резолвенте могу изразити парцијални изводи Кошијеве функције по све три променљиве.

1. Линеарна диференцијална једначина

У [4] смо изучавали диференцијалну једначину

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

где је $f(t,x) : G \to R^n$ непрекидна функција која има непрекидан парцијални извод по x, дефинисана на отвореном скупу G из $R \times R^n$. Овде ћемо разматрати линеарну диференцијалну једначину

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), \tag{2}$$

где су $A(t) : T \to L(R^n; R^n)$ и $b(t) : T \to R^n$ непрекидне функције, дефинисане на отвореном интервалу T. Линеарна диференцијална једначина (2) је специјалан случај диференцијалне једначине (1): $G = T \times R^n$, $f(t,x) = A(t)x + b(t)$. Лако је видети да је овако дефинисан скуп G отворен у $R \times R^n$ и да је овако дефинисана функција $f(t,x)$ непрекидна и има непрекидан парцијални извод по x, $f_x(t,x) = A(t)$.

Теорема 1.1. *Нека је $\tau \in T$ и нека је $\xi \in R^n$. Постоји решење диференцијалне једначине (2) које је дефинисано на интервалу T и које задовољава услов $x(\tau) = \xi$.*

Последица претходне теореме је

Теорема 1.2. *Домен S Кошијеве функције $x(t,\tau,\xi)$ линеарне диференцијалне једначине (2) је $T \times T \times R^n$.*

2. Резолвента

Овде ћемо разматрати хомогену линеарну диференцијалну једначину

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{3}$$

и одговарајућу једначину

$$\dot{R}(t) = A(t) \circ R(t), \tag{4}$$

где је $R(t)$ непозната операторска функција реалне променљиве, која узима вредности у простору $L(R^n; R^n)$. Диференцијална једначина (4) је такође линеарна. Према теореми 1.2, Кошијева функција $R(t,\tau,P)$ диференцијалне једначине (4) дефинисана је на $T \times T \times L(R^n; R^n)$. Функција $R(t,\tau) = R(t,\tau,I)$, где је $I \in L(R^n; R^n)$ идентични оператор, назива се резолвентом диференциалне једначине (3).

Теорема 2.1. *Резолвента $R(t,\tau)$ диференцијалне једначине (3) је непрекидна функција која пресликава квадрат $T \times T$ у $L(R^n; R^n)$ и задовољава следећа два услова:*

a) $R_t(t,\tau) = A(t) \circ R(t,\tau)$,

b) $R(\tau,\tau) = I$.

Доказ. Тврђење ове теореме следи из дефиниције резолвенте, теореме 1.2 и својстава Кошијеве функције датих теоремама 2.3 и 2.4 из [4]. ■

Теорема 2.2. *Нека је $R(t,\tau,P)$ Кошијева функција диференцијалне једначине (4) и нека је $R(t,\tau)$ резолвента диференцијалне једначине (3). Тада важи:*

a) $R(t,\tau,P) = R(t,\tau)\circ P$,

b) $R(t,\tau')\circ R(\tau',\tau) = R(t,\tau)$.

Доказ. a) Нека је $Q(t,\tau,P) = R(t,\tau)\circ P$. Како је

$$Q(\tau,\tau,P) = R(\tau,\tau)\circ P = I\circ P = P,$$

и

$$\frac{d}{dt}Q(t,\tau,P) = \frac{d}{dt}R(t,\tau)\circ P = A(t)\circ R(t,\tau)\circ P = A(t)\circ Q(t,\tau,P)$$

за $t\in T$, то је

$$R(t,\tau,P) = Q(t,\tau,P) = R(t,\tau)\circ P.$$

b) Према теореми 2.3, из [4] имамо да је

$$R(t,\tau',R(\tau',\tau,P)) = R(t,\tau,P)$$

за $P\in L(R^n;R^n)$. Применом тачке a) ове теореме, добијамо да је

$$R(t,\tau')\circ R(\tau',\tau)\circ P = R(t,\tau)\circ P$$

за свако $P\in L(R^n;R^n)$. Из претходне релације следи b). ∎

Теорема 2.3. *Резолвента $R(t,\tau)$ диференцијалне једначине (3) задовољава*

$$R_\tau(t,\tau) = -R(t,\tau)\circ A(\tau).$$

Доказ. Према теоремама 2.2 и 2.1 имамо да је

$$R(t,\tau)\circ R(\tau,t) = R(t,t) = I$$

за $t,\tau\in T$. Следи да је

$$R(t,\tau) = R(\tau,t)^{-1}$$

за $t,\tau\in T$. Помоћу ове релације и теореме 2.1 добијамо да је резолвента $R(t,\tau)$ диференцијабилна по променљивој τ и да је

$$\begin{aligned} R_\tau(t,\tau) &= -R(\tau,t)^{-1}\circ R_t(\tau,t)\circ R(\tau,t)^{-1}\\ &= -R(\tau,t)^{-1}\circ A(\tau)\circ R(\tau,t)\circ R(\tau,t)^{-1} = -R(t,\tau)\circ A(\tau)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Помоћу резолвенте могуће је изразити Кошијеву функцију $x(t,\tau,\xi)$ линеарне диференцијалне једначине (2) и Кошијеву функцију $p(t,\tau,\pi)$ линеарне диференцијалне једначине

$$\dot p(t) = -p(t)A(t) + c(t), \tag{5}$$

где непозната функција $p(t)$ узима вредности из простора R^{n*}. Функција $c(t)$ је непрекидна функција која је дефинисана на T и узима вредности из R^{n*}.

Теорема 2.4. *Нека је $x(t,\tau,\xi)$ Кошијева функција линеарне дифефренцијалне једначине (2), нека је $p(t,\tau,\pi)$ Кошијева функција линеарне диференцијалне једначине (5) и нека је $R(t,\tau)$ резолвента диференцијалне једначине (3). Тада важи:*

a) $x(t,\tau,\xi) = R(t,\tau)\xi + \int_\tau^t R(t,s)b(s)ds,$

b) $p(t,\tau,\pi) = \pi R(\tau,t) + \int_\tau^t c(s)R(s,t)ds.$

Доказ. a) Нека је

$$x(t) = R(t,\tau)\xi + \int_\tau^t R(t,s)b(s)ds.$$

Имамо да је

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\left[R(t,\tau)\left(\xi + \int_\tau^t R(\tau,s)b(s)ds\right)\right]\\ &= R_t(t,\tau)\left(\xi + \int_\tau^t R(\tau,s)b(s)ds\right) + R(t,\tau)\frac{d}{dt}\left(\xi + \int_\tau^t R(\tau,s)b(s)ds\right)\\ &= A(t)R(t,\tau)\left(\xi + \int_\tau^t R(\tau,s)b(s)ds\right) + R(t,\tau)R(\tau,t)b(t))\\ &= A(t)x(t) + b(t),\end{aligned}$$

за свако $t \in T$ и

$$x(\tau) = R(\tau,\tau)\xi + \int_\tau^\tau R(\tau,s)b(s))ds = \xi.$$

Следи да је $x(t) = x(t,\tau,\xi)$.

b) Нека је

$$p(t) = \pi R(\tau,t) + \int_\tau^t c(s))R(s,t)ds.$$

Имамо да је

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= \frac{d}{dt}\left[\left(\pi + \int_\tau^t c(s))R(s,\tau)ds\right)R(\tau,t)\right]\\ &= \frac{d}{dt}\left(\pi + \int_\tau^t c(s)R(s,\tau)ds\right)R(\tau,t) + \left(\pi + \int_\tau^t c(s)R(s,\tau)ds\right)R_\tau(\tau,t)\\ &= c(t)R(t,\tau)R(\tau,t) - \left(\pi + \int_\tau^t c(s)R(s,\tau)ds\right)R(\tau,t)A(t)\\ &= -p(t)A(t) + c(t),\end{aligned}$$

за свако $t \in T$ и

$$p(\tau) = \pi R(\tau, \tau) + \int_{\tau}^{\tau} c(s) R(s, \tau) ds = \pi.$$

Следи да је $p(t) = p(t, \tau, \pi)$. ■

3. Парцијални изводи Кошијеве функције

Према теореми 2.4 из [4], Кошијева функција $x(t, \tau, \xi)$ диференцијалне једначине (1) је непрекидно диференцијабилна функција. Овде ћемо показати како се могу наћи њени парцијални изводи.

Теорема 3.1. *Парцијални изводи Кошијеве функције* $x(t, \tau, \xi)$ *диференцијалне једначине (1) у тачки* $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) \in S$ *дати су са*

$$x_t(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = f(\bar{t}, x(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{\xi})), \tag{6}$$

$$x_\tau(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = -R(\bar{t}, \bar{\tau}) f(\bar{\tau}, \bar{\xi}, u(\bar{\tau})), \tag{7}$$

$$x_\xi(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = R(\bar{t}, \bar{\tau}), \tag{8}$$

где је $R(t, \tau)$ *резолвента линеарне диференцијалне једначине*

$$\dot{x}(t) = f_x(t, x(t, \bar{\tau}, \bar{\xi})) x(t). \tag{9}$$

Доказ. Према теореми 2.3 из [4] имамо да Кошијева функција $x(t, \tau, \xi)$ задовољава услове

$$x_t(t, \tau, \xi) = f(t, x(t, \tau, \xi)), \tag{10}$$

$$x(\tau, \tau, \xi) = \xi. \tag{11}$$

Из (10) непосредно следи (6).

Диференцирањем једначине (10) по τ добијамо диференцијалну једначину

$$\dot{x}_\tau(t, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = f_x(t, x(t, \bar{\tau}, \bar{\xi})) x_\tau(t, \bar{\tau}, \bar{\xi}),$$

по $x_\tau(t, \bar{\tau}, \bar{\xi})$. Одговарајући почетни услов добијамо диференцирањем (11) по τ, на следећи начин:

$$x_t(\bar{\tau}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) + x_\tau(\bar{\tau}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = 0,$$
$$x_\tau(\bar{\tau}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = -\dot{x}(\bar{\tau}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = -f(\bar{\tau}, x(\bar{\tau}, \bar{\tau}, \bar{\xi})).$$

На основу теореме 2.4, одавде добијамо (7).

Диференцирањем једначине (10) по ξ добијамо диференцијалну једначину

$$\dot{x}_\xi(t, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = f_x(t, x(t, \bar{\tau}, \bar{\xi})) \circ x_\xi(t, \bar{\tau}, \bar{\xi})$$

по $x_\xi(t, \bar{\tau}, \bar{\xi})$. Одговарајући почетни услов добијамо диференцирањем (11) по ξ:

$$x_\xi(\bar{\tau}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = I.$$

На основу теореме 2.1, одавде добијамо (8). ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan, H., *Calcul différentiel. Formes Différentielles*, Hermann, Paris, 1967.
2. Йоффе, А.Д., Тихомиров, В.М., *Теория экстремальных задач*, Наука, Москва, 1974.
3. Алексеев, В.М., Тихомиров, В.М., Фомин, С.В., *Оптимальное управление*, Наука, Москва, 1979.
4. Јанковић, В., *Зависност решења диференцијалне једначине од почетних услова*, Настава математике, LIV 2–3, Београд, 2009, 31–37.

Математички факултет, Студентски трг 16, 11000 Београд
E-mail: `vjankovic@matf.bg.ac.rs`