Јелена Гајић и Сандра Косић-Јеремић

ЈЕДАН ЗАДАТАК СА КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА

У овом раду ћемо формулисати и доказати на три начина једно тврђење у вези са комплексним бројевима, које представља уопштење познатог задатка, а који гласи овако.

Доказати да је израз $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}$ *реалан број, ако су* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *и важи* $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1 \cdot z_2 \neq -1$.

У доказима ћемо користити сљедеће познате особине комплексних бројева:

1° $z\cdot\bar z = |z|^2$, $\quad 2^\circ$ $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar z}{2}$, $\quad 3^\circ$ $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar z}{2i}$,

4° $\overline{z_1}+\overline{z_2} = \overline{z_1+z_2}$, $\quad 5^\circ$ $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \overline{z_1\cdot z_2}$, $\quad 6^\circ$ $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$,

7° ако је $z = \bar z$, тада је z реалан број.

Задатак. Нека су дати комплексни бројеви z_1 и z_2, такви да је $|z_1| = C$, $|z_2| = D$ и $C, D \neq 0$. Доказати да је израз $\dfrac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2}$ $(a, b \in \mathbf{R}\setminus\{0\})$ реалан број ако су задовољени услови:

$$(*)\qquad \frac{b}{a} = \frac{C}{D}$$

и $z_1 \cdot z_2 \neq -CD$.

Доказ 1.

$$\begin{aligned}
\frac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2} &= \frac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2}\cdot\frac{CD+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{CD+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}\\
&= \frac{aCD\cdot z_1 + a(z_1\cdot\overline{z_1})\cdot\overline{z_2} + bCD\cdot z_2 + b\cdot\overline{z_1}\cdot(z_2\cdot\overline{z_2})}{|CD+z_1\cdot z_2|^2}\\
&= \frac{aCD\cdot z_1 + a|z_1|^2\cdot\overline{z_2} + bCD\cdot z_2 + b\cdot\overline{z_1}\cdot|z_2|^2}{|CD+z_1\cdot z_2|^2}\\
&= \frac{aCD\cdot z_1 + aC^2\cdot\overline{z_2} + bCD\cdot z_2 + b\cdot\overline{z_1}\cdot D^2}{|CD+z_1\cdot z_2|^2}
\end{aligned}$$

с обзиром да је $bD = aC$ (услов $(*)$), имамо

$$= \frac{aCD\cdot z_1 + aC^2\cdot\overline{z_2} + aC^2\cdot z_2 + aCD\cdot\overline{z_1}}{|CD + z_1\cdot z_2|^2}$$
$$= \frac{aCD(z_1+\overline{z_1}) + aC^2(z_2+\overline{z_2})}{|CD + z_1\cdot z_2|^2}$$
$$= \frac{aCD\cdot 2\operatorname{Re} z_1 + aC^2\cdot 2\operatorname{Re} z_2}{|CD + z_1\cdot z_2|^2}.$$

Видимо да су у добијеном изразу и у бројиоцу и у имениоцу реални бројеви, одакле закључујемо да је и израз $\dfrac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2}$ реалан број, чиме је наш тврђење доказано.

Доказ 2. Идеја овог доказа је да покажемо да је, уз дати услов $(*)$, имагинарни дио датог израза увијек нула.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2} - \frac{a\overline{z_1}+b\overline{z_2}}{CD+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{aCDz_1 + a(z_1\overline{z_1})\overline{z_2} + bCDz_2 + b\overline{z_1}(z_2\overline{z_2}) - aCD\overline{z_1} - bCD\overline{z_2} - a(z_1\overline{z_1})z_2 - b(z_2\overline{z_2})z_1}{|CD+z_1\cdot z_2|^2}$$
$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{aCDz_1 + aC^2\overline{z_2} + bCDz_2 + b\overline{z_1}D^2 - aCD\overline{z_1} - bCD\overline{z_2} - aC^2z_2 - bD^2z_1}{|CD+z_1\cdot z_2|^2}$$
$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{D(z_1-\overline{z_1})(aC-bD) + C(z_2-\overline{z_2})(bD-aC)}{|CD+z_1\cdot z_2|^2} \overset{(*)}{=} 0,$$

чиме је доказ 2 завршен.

Доказ 3. Представићемо колмплексне бројеве у Ојлеровом облику, тј. нека је $z_1 = Ce^{i\varphi_1}$ и $z_2 = De^{i\varphi_2}$. Напоменимо да је $2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$.

Тада је, уз услов $bD = aC$,

$$\frac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2} = \frac{aCe^{i\varphi_1} + bDe^{i\varphi_2}}{CD + Ce^{i\varphi_1}\cdot De^{i\varphi_2}} = \frac{aC(e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2})}{CD(1+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)})}$$
$$= \frac{ae^{\frac{i(\varphi_1+\varphi_2)}{2}}\left(e^{\frac{i(\varphi_1-\varphi_2)}{2}} + e^{-\frac{i(\varphi_1-\varphi_2)}{2}}\right)}{De^{\frac{i(\varphi_1+\varphi_2)}{2}}\left(e^{-\frac{i(\varphi_1+\varphi_2)}{2}} + e^{\frac{i(\varphi_1+\varphi_2)}{2}}\right)}$$
$$= \frac{a\cdot 2\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{D\cdot 2\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} = \frac{a\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{D\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}},$$

па је израз $\dfrac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2}$ реалан број.

Уочимо да, за $a = b = 1$ и $C = D = 1$, израз $\dfrac{az_1+bz_2}{CD+z_1\cdot z_2}$ има облик $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$.

Да је израз $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ реалан број, можемо показати и на сљедећи начин:

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}\cdot\frac{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_2}+\overline{z_1}}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}+1} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1\cdot z_2}\right)}.$$

Читаоцима предлажемо да сами ријеше сљедеће варијанте датог задатка:

1. Нека су дати комплексни бројеви z_1 и z_2, такви да је $|z_1| = C$, $|z_2| = D$ и $CD \neq 0$. Доказати да је израз $\dfrac{az_1 - bz_2}{CD - z_1 z_2}$ $(a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ реалан број ако су задовољени услови $\dfrac{b}{a} = \dfrac{C}{D}$ и $z_1 z_2 \neq CD$.

2. Нека су дати комплексни бројеви z_1 и z_2, такви да је $|z_1| = C$, $|z_2| = D$ и $CD \neq 0$. Доказати да је израз $\dfrac{az_1 - bz_2}{CD + z_1 z_2}$ $(a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ реалан број ако су задовољени услови $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{C}{D}$ и $z_1 z_2 \neq -CD$.

3. Нека су дати комплексни бројеви z_1 и z_2, такви да је $|z_1| = C$, $|z_2| = D$ и $CD \neq 0$. Доказати да је израз $\dfrac{az_1 + bz_2}{CD - z_1 z_2}$ $(a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ реалан број ако су задовољени услови $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{C}{D}$ и $z_1 z_2 \neq CD$.

Природно-математички факултет Универзитета у Бањој Луци
E-mail: `sandrakos2002@yahoo.com`

ОБАВЕШТЕЊА

„КЕНГУР БЕЗ ГРАНИЦА“

Друштво математичара Србије, са одобрењем Међународне асоцијације „Кенгур без граница“ са седиштем у Паризу, од школске 2006/07 године организује у Србији Међународно математичко такмичење „Кенгур без граница“. У оквиру такмичења ученици, сад већ у преко 50 држава, у исто време размишљају о истим проблемима и решавају исте задатке. Прошле године на такмичењу је учествовало око 5 милиона ученика, од тога преко 18 000 из Србије.

Датум и време такмичења јединствено је у целој Европи:

18. март 2010. године у 10 часова.

Ученици се такмиче у категоријама, од 2. разреда основне до 4. разреда средње школе.

Пријаве се могу извршити на три начина:

1. Преко web странице Друштва математичара Србије

`www.dms.org.rs/kengur`

2. Електронском поштом на адресу `kengur@dms.org.rs`.

3. Обичном поштом на адресу Друштва математичара Србије, Кнеза Михаила 35/IV, 11000 Београд, са назнаком „за Кенгур“.

Свеске са урађеним задацима из претходних пет година могу се набавити преко Друштва математичара.