Др Шефкет Арсланагић

ПОБОЉШАЊЕ ЈЕДНЕ ГЕОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ У ПРАВОУГЛОМ ТРОУГЛУ

Побољшање (профињење) неједнакости у математици представља један интересантан, важан и креативан посао који је често тежак и сложен. У овом чланку ћемо дати побољшање једне геометријске неједнакости која се односи на правоугли троугао.

Поћи ћемо од познате неједнакости

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2, \tag{1}$$

која важи за свака два позитивна броја a и b. Узимајући уместо тих бројева дужине c и h хипотенузе и њој одговарајуће висине неког правоуглог троугла, добијамо да вриједи $\frac{c}{h}+\frac{h}{c}\geqslant 2$. У неједнакости (1) једнакост вриједи само ако је $a=b$. Како у правоуглом троуглу не може да буде $c=h$ (јер је увијек $c>h$), то слиједи да је увијек

$$\frac{c}{h}+\frac{h}{c}>2. \tag{2}$$

Сада ћемо доказати једно побољшање неједнакости (2) које гласи

$$\frac{c}{h}+\frac{h}{c}\geqslant\frac{5}{2}. \tag{3}$$

Стављајући у неједнакост (3) да је $h=\frac{ab}{c}$, добијамо сљедећи низ њој еквивалентних неједнакости

$$\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}\geqslant\frac{5}{2},$$
$$\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{ab}{a^2+b^2}\geqslant\frac{5}{2},$$
$$2(a^2+b^2)^2+2a^2b^2-5ab(a^2+b^2)\geqslant 0,$$
$$2a^4-5a^3b+6a^2b^2-5ab^3+2b^4\geqslant 0,$$
$$2t^4-5t^3+6t^2-5t+2\geqslant 0 \quad (\text{смјена } a=bt \text{ и скраћивање са } b^4),$$
$$(t-1)^2(2t^2-t+2)\geqslant 0 \quad (\text{факторисање полинома коришћењем Безуове теореме}),$$
$$2(t-1)^2\left[\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\geqslant 0.$$

Последња неједнакост је очигледно тачна јер је $\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, те $(t-1)^2 \geqslant 0$ за све $t \in \mathbf{R}$, па је тачна и неједнакост (3).

Једнакост вриједи ако и само ако је $t=1$, тј. $a=b$, када добијамо једнакокрако-правоугли троугао код кога је $c=a\sqrt{2}$ и $h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Свакако, неједнакост (3) је боља (јача, оштрија) од неједнакости (2), јер је $5/2>2$.

Вјеровати је и надати се да ће дати примјер побољшања ове геометријске неједнакости бити поучан за младе читаоце, поготово за оне ученике који показују већи интерес за математику и учествују на разним такмичењима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo 2004.
2. Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka iz elementarne matematike sa osnovama teorije*, Grafičar promet, Sarajevo 2006.
3. O. Bottema & al, *Geometric Inequalities*, Wolthers-Noordhoff Oublishing, Groningen, 1969.

Универзитет у Сарајеву, Природно-математички факултет, Змаја од Босне 35, 71000 Сарајево, Босна и Херцеговина

E-mail: asefket@pmf.unsa.ba