Др Момчило Бјелица, мр Драгица Ранковић

ПРИМЕНА ПРИНЦИПА РЕЗОЛУЦИЈЕ У ТЕОРИЈИ ФАЗИ СКУПОВА КОД ОЦЕЊИВАЊА УЧЕНИКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Увод у фази теорију

Фази скуп представља основни елемент за обраду непрецизности у фази теорији. За разлику од класичног, дискретног скупа који представља колекцију елемената са истим својствима, за фази скуп можемо рећи да представља колекцију елемената са сличним својствима. Да би се описала припадност неког елемента фази скупу користи се фази функција припадности. Теорија фази скупова, расутих, расплинутих скупова, представља погодни математички апарат за израду модела различитих процеса у којима доминира неизвесност, вишезначност, субјективност, неодређеност итд.

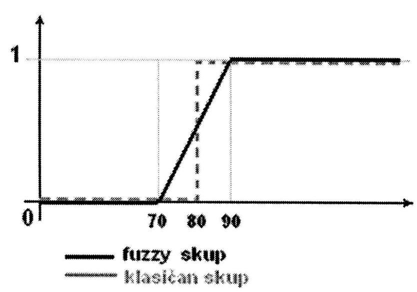
У класичној теорији скупова вредност $\mu_A(x)$ исказа „елемент x припада скупу A“ може бити 0 или 1, тј. припадати скупу $\{0,1\}$. Уколико скуп $\{0,1\}$ заменимо интервалом $[0,1]$, тада функција припадности μ_A елемената постаје „расплинута“, и она дефинише „колико неки елемент x универзалног скупа X припада скупу A“, односно одређује степен слагања с концепцијом коју представља фази скуп A.

Дефиниција 1. Фази скуп A из скупа X може се дефинисати као скуп уређених парова $(x, \mu_A(x))$,

$$A = \{\, (x, \mu_A(x)) \mid x \in X \,\}, \qquad \mu_A(x) \in [0,1]$$

где је μ_A функција припадности (или карактеристична функција) скупа A и притом $\mu_A(x)$ представља степен припадања елемента x фази скупу A.

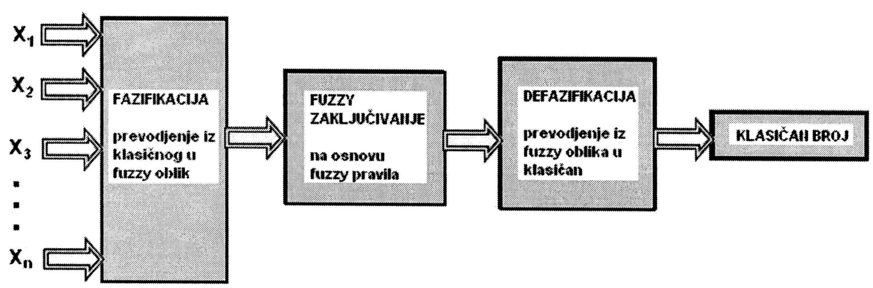
Уколико је $\mu_A(x)$ веће, утолико „има више истине“ у тврђењу да елемент x припада скупу A.



Слика 1. Приказ класичног и фази скупа

Теорија фази логике је део шире теорије фази скупова. Она проширује класичну логику на непрекидно подручје истинитих вредности унутар сегмента $[0,1]$, омогућавајући дефинисање и прелазних вредности, а не само конвенционалне бинарне вредности. Теорија фази скупова проширује ограничење бинарних скупова тако што омогућује степенаст или мекши прелаз међу скуповима, што је нарочито погодно за описивање неодређених, вишезначних ситуација и појава. Код фази скупова, елемент није строго унутар, нити је строго изван скупа, он може бити делимично у скупу. Стога, функција припадности за фази скупове узима вредности из интервала $[0,1]$ за разлику од скупа вредности $\{0,1\}$ код класичних скупова.

Фази закључивање је засновано на фази логици и опонаша људско закључивање са приближним информацијама и неизвесностима приликом доношења закључака. Оно се састоји од неколико правила, скупа чињеница и од самог закључка. Фази правила повезују улазне променљиве са закључком, односно услове са одређеним радњама које треба извршити. Њихова форма се може описати АКО-ОНДА правилима, где је АКО-део правила услов, а ОНДА-део представља закључак, акцију. Извршавање фази закључивања се најчешће описује моделом фази логике приказаном на слици 2.



Слика 2. Модел закључивања у фази логици

Модел закључивања у фази логици обухвата три основна дела и то:

1. фази улазне и излазне променљиве, које су дефинисане својим фази вредностима,
2. скуп фази правила,
3. механизам фази закључивања.

Фази правила се примењују над фази вредностима, користећи фази логичке операције. Логичке фази вредности су, на пример, „добар“, „врло добар“, „више од доброг“ и тако даље. Ови фази појмови се најаешће представљају њиховим функцијама припадности. Функција припадности показује досег до које је нека вредност укључена у фази појму. На пример, проблем довољног знања и завршетак разреда. Фази правило дефинише број бодова, као границу, услов за прелаз на знање потребно за позитиван успех и завршетак разреда. На пример, условно фази правило може да каже: АКО ЈЕ ученик у свакој предвиђеној активности постигао више од 20 бодова, ТАДА је успех из предмета позитиван, односно може завршити разред.

Оцењивање знања ученика се може генерално описати теоријом фази логике, која као улаз има фази вектор, а излаз је класичан број, скалар који представља оцену учениковог знања.

2. Оцењивање ученика из математике

За разлику од класичног скупа који има оштре границе раздвајања елемената, припадност елемената у фази скупу се дозвољава са одређеном поузданошћу. Тако границе раздвајања у броју постигнутих бодова код оцењивања ученика можемо схватити са одређеним степеном поузданости. Предложени нови начин оцењивања ученика из Математике, базира се на предностима, могућностима и новим техникама, које омогућују нове иформационе технологије и особине теорије фази скупова и фази логике.

Дефиниција 2. За задато $a \in (0,1]$, α-пресек A_α фази скупа A је обичан подскуп скупа X дефинисан као

$$A_\alpha = \{\, x \in X \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha \,\}. \tag{2}$$

Уколико је $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, тада је $A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$. Строги α-пресек имамо ако у дефиницији ставимо $\mu_A(x) > \alpha$. Користећи α-пресек, фази скуп можемо записати као

$$A = \int_{(0,1]} \alpha \cdot A_\alpha = \sum_\alpha \alpha \cdot A_\alpha. \tag{3}$$

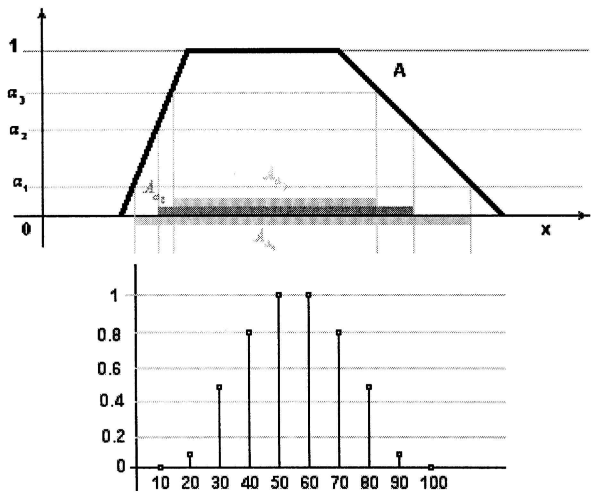
α-пресек се често користи за проширење класичних на фази скупове. Функција припадности се може изразити помоћу α-пресека на следећи начин:

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \min(\alpha, \mu_{A_\alpha}(x)), \tag{4}$$

где је $\mu_{A_\alpha}(x)$ функција припадности обичног скупа A_α и узима вредности 0 или 1.

Пример. α-пресек фази скупа C, који описује концепт „добар успех“.

$$\begin{gathered}
C = \frac{0}{10} + \frac{0.1}{20} + \frac{0.5}{30} + \frac{0.8}{40} + \frac{1}{50} + \frac{1}{60} + \frac{0.8}{70} + \frac{0.5}{80} + \frac{0.1}{90} + \frac{0}{100}, \\
\alpha_1 = 0.1, \quad A_{0.8} = \{20, 90\}, \\
\alpha_2 = 0.5, \quad A_{0.5} = \{30, 80\}, \\
\alpha_3 = 0.8, \quad A_{0.2} = \{40, 70\}.
\end{gathered}$$



Слика 3. α-пресеци фази скупа C

Пример оцењивања ученика. У нашем моделу оцењивања, простор припадања је скуп $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$. Ради лакшег разумевања нашег проблема, претпоставимо да је број бодова успеха, постигнућа за сваку активност ученика из скупа $X = \{10, 20, 30, \ldots, 90, 100\}$. Посматраћемо следеће фази скупове:

A = „одличан успех“, B = „врло добар успех“,
C = „добар успех“, D = „довољан успех“,
E = „недовољан успех“,

чије су функције припадности приказане следећом табелом.

Brojni rezultati	Odličan uspeh (A)	Vrlo dobar uspeh (B)	Dobar uspeh (C)	Dovoljan uspeh (D)	Nedovoljan uspeh (E)
10	0	0	0	0.1	1
20	0	0	0.1	0.5	1
30	0	0	0.5	0.8	0.8
40	0	0.1	0.8	1	0.5
50	0.1	0.5	1	1	0.3
60	0.3	0.8	1	0.8	0.1
70	0.5	1	0.8	0.5	0
80	0.8	1	0.5	0.1	0
90	1	0.8	0.1	0	0
100	1	0.5	0	0	0

Табела 1. Функције припадности датих скупова

Фази скупове можемо представити преко подршке (support) фази скупа. Подршка фази скупа јесте класичан скуп елемената $x \in X$, таквих да је $\mu_A(x) > 0$, у ознаци $\operatorname{supp}(A) = \{\, x \in X \mid \mu_A(x) > 0 \,\}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}(A) &= \{50, 60, 70, 80, 90, 100\},\\
\operatorname{supp}(B) &= \{40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\},\\
\operatorname{supp}(C) &= \{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\},\\
\operatorname{supp}(D) &= \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\},\\
\operatorname{supp}(E) &= \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}.
\end{aligned}$$

Фази скуп A, чија се подршка састоји од само једног елемента из X и при том је $\mu_A = 1$ назива се фази синглтон (singleton). Елемент $x \in X$, за који важи $\mu_A = 0.5$ назива се тачка проласка (crossover point).

Уколико је скуп X дискретан, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, фази скуп A се може представити помоћу уређених парова:

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\}. \tag{5}$$

Тако за скуп B, у нашем примеру можемо писати $B = \{(10, 0), (20, 0), (30, 0), (40, 0.1), (50, 0.3), (60, 0.8), (70, 1), (80, 1), (90, 0.8), (100, 0.5)\}$.

Користећи подршку на фази скупу A, можемо писати

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{x_i}. \tag{6}$$

Знак „+“ означава унију елемената, а μ_i одговарајући степен припадања елемента x_i, при чему је $\mu_i = \mu_A(x_i) > 0$. Тако бисмо наш скуп B представили на следећи начин

$$B = \frac{0.1}{40} + \frac{0.5}{50} + \frac{0.8}{60} + \frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{0.8}{90} + \frac{0.5}{100}.$$

Под „нивоом задовољења h“ подразумевамо вредност из сегмента $[0, 1]$ са којом су (у најгорем случају) задовољене све критеријумске функције и сва ограничења постављеног проблема фази математичког програмирања. У нашем моделу оцењивања ниво задовољења је услов од 20 бодова, који се поставља да би се могла израчунавати тражена вредност оцене.

3. Примена принципа резолуције

Важна особина фази скупова јесте принцип резолуције (resolution principle), за који користимо претходно уведени појам α-пресека, који још називамо и α-одсецање (α-cut). Скуп нивоа датог фази скупа A је

$$\lambda_A = \{\alpha \mid \alpha = \mu_A(x) \text{ за неко } x \in X\,\}. \tag{7}$$

За наше фази скупове можемо писати:

$$A_{0.5} = \{70, 80, 90, 100\}, \quad C_{0.8} = \{40, 50, 60, 70\}, \quad E_{0.3} = \{10, 20, 30, 40, 50\},$$
$$\lambda_A = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1\}, \quad \lambda_C = \{0.1, 0.5, 0.8, 1\}.$$

Принцип резолуције означава да се фази скуп A може декомпоновати на скуп фази скупова αA_α, $\alpha \in (0,1]$. С друге стране, фази скуп A може бити представљен унијом одговарајућих скупова, што се назива теоремом репрезентације. Фази скуп се може представити у облику одговарајућих α-одсецања без губитка информације о функцији припадности.

Наш посматрани скуп A можемо представити као $A = \frac{0.1}{50} + \frac{0.3}{60} + \frac{0.5}{70} + \frac{0.8}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}$ и користећи се принципом резолуције, скуп A се може написати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{0.1}{50} + \frac{0.3}{60} + \frac{0.5}{70} + \frac{0.8}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100} \\
&= \frac{0.1}{50} + \frac{0.1}{60} + \frac{0.1}{70} + \frac{0.1}{80} + \frac{0.1}{90} + \frac{0.1}{100} \\
&\quad + \frac{0.3}{60} + \frac{0.3}{70} + \frac{0.3}{80} + \frac{0.3}{90} + \frac{0.3}{100} \\
&\quad + \frac{0.5}{70} + \frac{0.5}{80} + \frac{0.5}{90} + \frac{0.5}{100} \\
&\quad + \frac{0.8}{80} + \frac{0.8}{90} + \frac{0.8}{100} \\
&\quad + \frac{1}{90} + \frac{1}{100},
\end{aligned}$$

или, у домену αA_α скупова,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{0.1}{50} + \frac{0.3}{60} + \frac{0.5}{70} + \frac{0.8}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100} \\
&= 0.1\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{60} + \frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + 0.3\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + 0.5\left(\frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + 0.8\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right) \\
&\quad + 1\left(\frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right) \\
&= 0.1A_{0.1} + 0.3A_{0.3} + 0.5A_{0.5} + 0.8A_{0.8} + 1A_1 = \bigcup_{\alpha\in\lambda_A} \alpha A_\alpha,
\end{aligned}$$

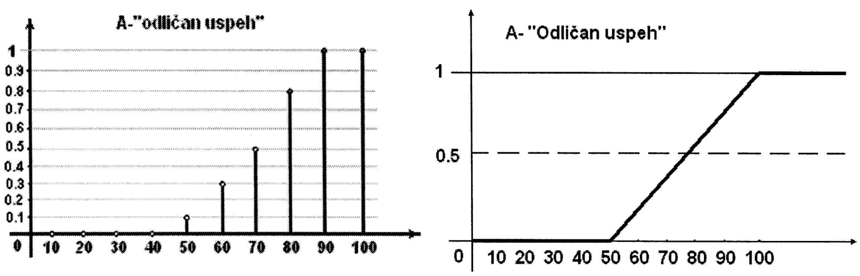
где је $\lambda_A = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1\}$, при чему је

$$0.1A_{0.1} = 0.1\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{60} + \frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right),$$

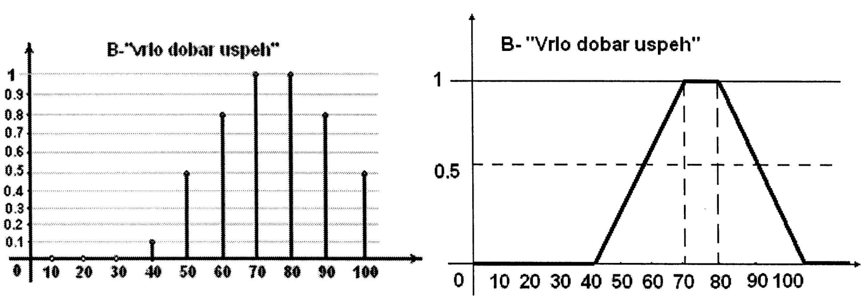
$$0.3A_{0.3} = 0.3\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right),$$

$$0.5A_{0.5} = 0.5\left(\frac{1}{70} + \frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right),$$
$$0.8A_{0.8} = 0.8\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right),$$
$$1A_1 = 1\left(\frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right).$$

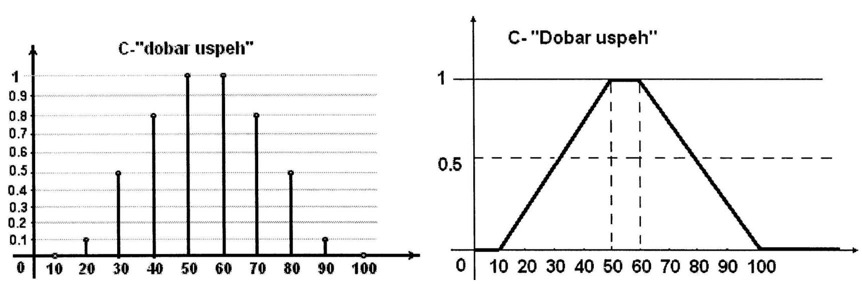
Наши посматрани скупови се могу представити графички:



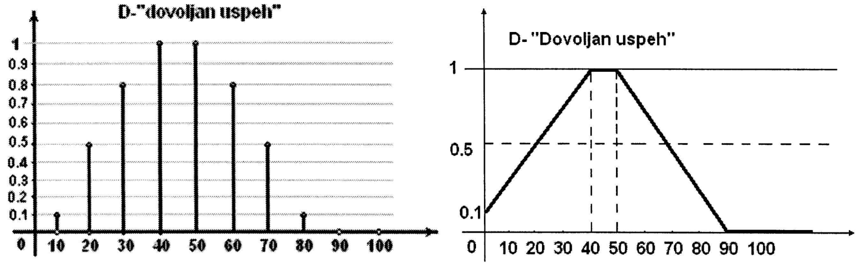
Слика 4. Фази скуп A – „одличан успех“



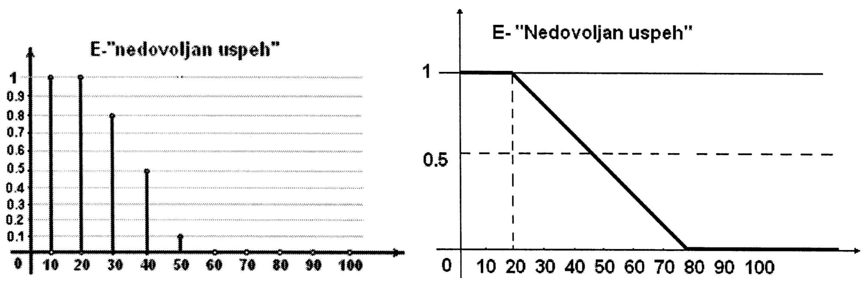
Слика 5. Фази скуп B – „врло добар успех“



Слика 6. Фази скуп C – „добар успех“

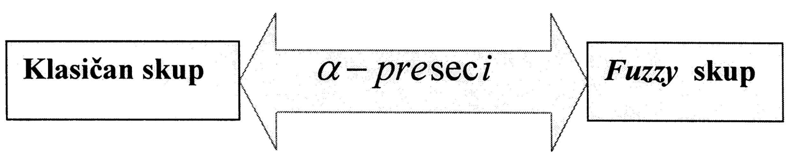


Слика 7. Фази скуп D – „довољан успех“



Слика 8. Фази скуп E – „недовољан успех“

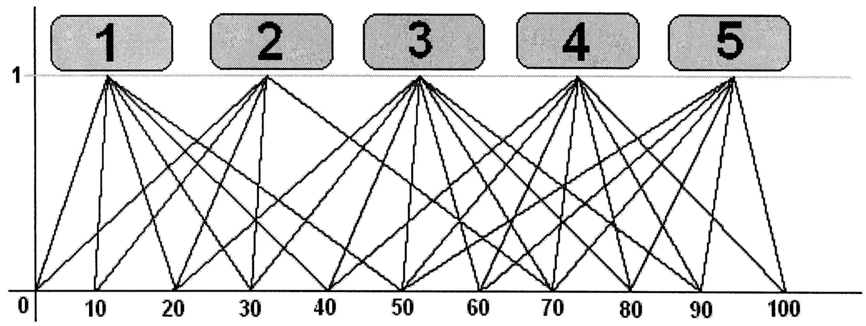
Теорема представљања. *Нека је $\alpha \in [0,1]$ и A обичан скуп. Ниво αA је фази скуп у којем сваки елемент има степен припадности једнак α. Сваки се фази скуп може представити као $A = \sum\limits_{\alpha} \alpha A_\alpha$, односно $A = \int_{[0,1]} \alpha A_\alpha$.*



Пресек α-нивоа се често користи за проширење класичних скупова на фази скупове.

4. Закључак

Предложени начин оцењивања би требало да допринесе ефикаснијем, објективнијем, бржем и квалитетнијем процењивању ученикових знања и вештина, што би допринело повећању укупне ефикасности, квалитета и осавремењавања читавог васпитно-образовног рада у школи, а истовремено обезбедило и бољи систем селекције ученика за даље школовање, јер ће се у будућности и школе оцењивати на основу пролазности ученика на пријемним испитима за упис на више нивое образовања, што је већ присутна пракса у неким земљама.



Слика 9. Графички приказ повезаности улазних распона могућих улазних вредности, тј. постигнућа ученика и одговарајућих излазних вредности, тј. оцена ученика

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Правилник о оцењивању ученика у средњој школи***, „Сл. гласник РС“, бр. 33/99 и „Сл. гласник РС – Просветни гласник“, бр. 3/2003.
2. „Сл. гласник РС – Просветни гласник“, бр. 4/91 и 6/91 од 1990/91.
3. B. Dalbelo-Bašić, *Neizrazito, evolucijsko i neuro-računarstvo*, FER, Zagreb, 2004.
4. B. Dalbelo-Bašić, *Uvod u neizrazitu logiku*, FER, Zagreb, 2004.
5. H. Gold, *Fuzzy logika u prometu i transportu*, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, 2008.

Момчило Бјелица, ТФ „Михајло Пупин“, Зрењанин

E-mail: dekanat@tf.zr.ac.yu

Драгица Ранковић, Медицинска школа „Др Миша Пантић“, Ваљево

E-mail: drankovic@ptt.rs