
НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Др Драгослав Херцег, мр Еуген Љајко

ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ РАЧУНАРА

Тема овог рада је осавремењивање процеса учења математике увођењем нових садржаја, наставних средстава и концепата наставе и ваннаставних видова учења. Ради се о предлогу за изучавање приближног решавања једначина уз помоћ рачунара у гимназијама и техничким школама. Наравно, нови садржаји и суштински нова наставна средства захтевају и концептуално другачију наставу.

Огледна настава из које су изведени закључци је, током више година, одржавана са ученицима четвртих разреда новосадске гимназије „Јован Јовановић Змај“ на Институту за математику и информатику Природноматематичког факултета у Новом Саду. Већина садржаја у настави као и у раду обрађивана је уз помоћ математичких софтвера *Mathematica* и *GeoGebra*.

Искуства стечена у страним и нашим истраживањима указују да се, уз мало маште и једноставног програмирања, могу постићи изванредни резултати у осавремењивању наставе.

Увод

Узимајући у обзир да је Упутствима о начину остваривања програма дозвољено одступање за око 10% предвиђених часова за неку тему (Службени гласник СР Србије – „Просветни гласник“, бр. 1/87 и „Просветни гласник“, бр. 3/91), након увида у садржаје тема по разредима, очевидно је да постојећи наставни програми математике дају довољно ширине за несметано увођење основних облика приближног решавања једначина, као што су графичке методе и итеративни поступци. Ове методе је најлакше излагати уз употребу рачунара али то захтева посебан дидактичкометодички приступ настави и посебна техничка решења за излагање саме материје о чему ће бити речи касније.

У првом разреду се могу искористити наставне теме *Реални бројеви* за неговање рада са приближним бројевима као и *Увод у геометрију* и *Подударност* ради упознавања са софтвером *GeoGebra*.

Све наставне теме у другом разреду се могу обрадити уз помоћ рачунара али то захтева извесно преобликовање наставне материје ради њеног прилагођавања рачунарском окружењу. У овом стадијуму се приликом обраде ирационалних,

експоненцијалних, логаритамских и тригонометријских једначина може приступити њиховом решавању графичком методом чија пуна снага долази до изражаја управо у рачунарском окружењу. Осим тога, могуће је и излагање методе половљења интервала. Она би, представљена уз помоћ програма *GeoGebra*, дала вишеструки допринос развијању математичког мишљења и повећању нивоа и квалитета знања и умећа ученика. Наиме, уз њену помоћ ученици би схватили да нумеричка математика нуди и конкретна решења тамо где је стандардна давала само теоретска. Осим тога, у њиховој когнитивној структури би се створила јака интуитивна основа за касније поимање појмова низ и гранична вредност низа.

Након обраде тема *Аналитичка геометрија у равни* и *Математичка функција*. *Низови* у трећем разреду ученици располажу знањима довољним за обраду методе сечице за чије би излагање било погодно користити програм *Mathematica*, евентуално у комбинацији са *GeoGebra*-ом.

Након обраде тема *Функције* и *Извод функције* у четвртном разреду уопште се комплетан фонд предзнања потребних за проучавање итеративних процеса. После наставне теме *Извод функције* или у склопу ње могу се обрадити итеративне методе уопште а затим би требало обрадити Њутнову методу као једну од итеративних метода. Поред тога, требало би знања о методама половљења интервала и сечице уклопити у општија знања о итеративним процесима.

Иако је наизглед потребно одвајати посебне часове за упознавање са наведеним софтверима (што је, само по себи, додатно оптерећење за ученике), искуства стечена у огледној настави говоре да је боље решење проучавање софтвера уклопити у учење материје и од њих учити само оно што је потребно за конкретну материју.

О којим методама је реч?

На основу експерименталне наставе у новосадској гимназији „Јован Јовановић Змај“ дошли смо до закључка да се и у стандардним одељењима гимназија као и у техничким школама могу изучавати и примењивати графичка метода решавања једначина и итеративне методе као: метода половљења интервала, метода сечице и Њутнова метода. Њихово изучавање се може уклопити у градиво другог, трећег и четвртог разреда. Осим тога може се проучавати и локализација нула функције са посебним освртом на локализацију нула полинома. Било би пожељно изучавати само најнужније од наведених метода и, у складу са тим, одредити минимум предзнања потребних за њихово усвајање како би се избегле две крајњости: недостатак знања потребних за разумевање изучаване материје и претрпавање ученика непотребним подацима.

Графичку методу решавања једначина је могуће успешно увести и примењивати већ у првом или другом разреду средњих школа. Медијум за њену успешну презентацију и примену је рачунар опремљен одговарајућим софтвером – неким од динамичних геометријских система (рецимо *GeoGebra*). Од предзнања је потребно схватање да график функције одражава својства функције која чини једну од страна једначине као и основно познавање особина употребљеног софтвера.

Локализацију нула функције је могуће посебно обрадити, али је због природе материје логично и најкорисније обрађивати је по потреби, паралелно са осталим методама и у складу са узрастом и стеченим знањима ученика. Треба приказати два њена облика: геометријски и аналитички при чему се геометријски само надовезује на графичку методу решавања једначина. За аналитичку локализацију нула функције је потребно познавање теореме о супротним знацима и при њеном излагању добро је прибегавати простијим, очевиднијим начинима барем до стадијума када ученици, по садашњем плану и програму, усвоје појмове граничне вредности и непрекидности функције.

Методу половљења интервала је могуће увести у другом разреду. Због узраста ученика било би добро модификовати методу у смислу избегавања употребе граничних вредности приликом представљања методе. Уколико се модификовање методе добро уради дало би вишеструки допринос сазревању знања, интуиције и способности ученика. За њено усвајање и примену се могу користити било динамични геометријски системи – DGS (*GeoGebra*) било рачунарски системи алгебре – CAS (*Mathematica*) али се њиховим комбиновањем могу постићи најбољи резултати.

У трећем разреду је природно обрадити методу сечице са посебним освртом на примитивну методу сечице. Излагање управо ове модификације методе сечице је прихватљивије за ученике и лакше за предавача из више разлога: како су сви чланови добијеног итеративног низа са исте стране траженог решења, због његове ограничености и монотоности лакше је доказати конвергенцију тог низа. С друге стране, ова модификација захтева само једну почетну вредност што може бити значајна предност приликом састављања програма у *Mathematica* потребних за решавање конкретних задатака.

Њутнову методу је могуће обрадити у четвртом разреду након наставне теме *Извод функције*. Притом се лако долази до тачке када сва места на којима се у претходним разредима избегавао строги приступ попуне јасним и потпуним знањима неопходним за правилно разумевање и примену поменутих метода.

Предложени софтвер

Јасно је да обраду и примену метода приближног решавања једначина није могуће ефикасно извести у разумном периоду без употребе рачунара и одговарајућег софтвера. Ми смо у раду са ученицима и за потребе овог рада користили математичке софтвере *GeoGebra* и *Mathematica* као представнике DGS и CAS које је најлакше уклопити у процес учења математике. У почетним стадијумима смо користили *GeoGebra* док је касније коришћена *Mathematica*, самостално или у комбинацији са *GeoGebra*-ом.

GeoGebra осим тога што нуди могућност реализације динамичне геометрије, поседује и неке особине CAS тако да се без потешкоћа може употребљавати и за приближно решавање једначина. Нема строгу синтаксу, унос података је врло сличан стандардној нотацији тако да је лако прихватљива за ученике свих узраста. Осим тога, преведена је и на српски језик што је било додатно олакшање у

раду са њом. Ради се о бесплатном софтверу који се може преузети са интернет странице www.geogebra.at.

Mathematica је далеко озбиљнији софтвер са сложенијом синтаксом и уносом података који се умногоме разликује од стандардне нотације. Зато смо програм користили у каснијим стадијумима. Програм се може наручити и купити преко интернет странице www.wolfram.com.

Без обзира на једноставност примене ових софтвера у раду са првим генерацијама (2002–2005) примећено је да упознавање ученика са комплетним софтвером или барем са његовим већим делом не даје одговарајуће резултате. Зато је у раду са каснијим генерацијама (2005–2007. и даље) практиковано да се ученици упознају само са делом софтвера који им је тренутно потребан. Осим тога у овом периоду ученици су охрабривани на слободнију употребу рачунара и експериментисање. Резултати оваквог приступа су били осетно бољи.

Проблеми, циљеви и задаци истраживања

Идеја овог рада је да се прокрчи пут значајнијем увођењу наставних јединица везаних за приближно решавање једначина у планове и програме гимназија и техничких школа, првенствено због њихове примене како у математици, тако и у ванматематичким областима. Због чињенице да се поменута наставна тема најлакше може успешно савладати у рачунарском окружењу било би потребно уочити обим и квалитет утицаја употребе рачунара и одговарајућих софтвера на савладавање садржаја и примену ове теме. Зато смо проблем овог истраживања дефинисали као:

Сагледавање могућег утицаја рачунарски потпомогнуте наставе на процес учења и успех у теми „*Приближно решавање једначина*“.

У складу са наведеним проблемом морају се конкретизовати циљеви овог истраживања. Груписали смо их на следећи начин:

1. Утврђивање прихваћености излагања материје уз помоћ рачунара и заинтересованости за приближно решавање једначина. Повратне информације би могле бити од користи при стварању оптималних услова за примену рачунарске наставе.
2. Одређивање обима и садржаја теме *Приближно решавање једначина*.

На основу наведених циљева постављају се задаци чијим би се испуњењем истраживање заокружило у једну логичку целину и заинтересованим наставницима пружила помоћ при организовању и извођењу рачунарске наставе не само у овој области. Задаци овог истраживања су:

1. Прецизирати методичко-дидактичке услове који ће утицати на повећање ефикасности обраде и примене приближног решавања једначина.
2. Израдити и проверити моделе рачунарске наставе како на нивоу наставног часа, тако и за мање и веће наставне целине.

Окружење у коме се изводила огледна настава

Имајући на уму наше техничке могућности одустали смо од класичног педагошког експеримента и приступили преуређењу, посматрању и унапређивању већ постојеће наставе у математичким одељењима новосадске гимназије „Јован Јовановић Змај“.

Ученици четвртх разреда ове гимназије слушају предмет Нумеричка математика у Лабораторији за нумеричка рачунања Департамента за математику и информатику Природно-математичког факултета у Новом Саду са фондом од два часа недељно. У оквиру овог наставног предмета изучава се и поглавље *Приближно решавање једначина* са укупним фондом од четрнаест часова. У зависности од њиховог броја, ученици су радили у једној или у две групе тако да је сваки ученик располагао својим рачунаром у учионици. Ученици су седели у клупама по два тако да је и рад у паровима био могућ на чему се такође инсистирало. Сви ученици су изјавили да или имају свој рачунар или га могу користити код куће. Домаћи задаци као и комуникација са наставником и међу ученицима су добрим делом рађени електронским путем. То значи да се рачунарско окружење није свело само на учионицу већ је природно постало и ваншколска активност. Наставник је имао свој рачунар и пројектор који је давао слику изнад табле.

Рад у току часа се одвијао комбинованим коришћењем табле и пројектора. Уз уџбеник [7], писан према важећем наставном плану и програму, дат је и пратећи CD. Овај CD садржи интерактивне примере и програме помоћу којих се корисници лакше упознају са појмовима и идејама изложеним у тексту уџбеника. Сваки задатак урађен на било ком рачунару у учионици могао је да се преузме на други рачунар или да се понесе на одговарајућем носиоцу меморије. Исто тако су могли да се размењују домаћи задаци. На тај начин ученици су допуњавали примере добијене на CD-у уз уџбеник. Ови задаци су се могли користити при изради тестова и писмених задатака.

У почетку, ученици су користили рачунар као средство за брже рачунање и цртање графика. Било је уобичајено да се раду на рачунару приступа након проучавања одговарајуће теорије, одређивања интервала конвергенције итд. Међутим, касније се природно наметнуо и доказао став да је корисније рачунар користити и током обраде одређене методе при чему се улога рачунара трансформише од помоћног средства у користан извор информација као и покретач и извор нових идеја везаних за проблем. У раду са прве три генерације било је уобичајено да се део времена одвоји за упознавање са програмом *Mathematica* али су ученици то (оправдано) доживљавали као додатно градиво за учење. У раду са наредним генерацијама изучавали смо само делове *Mathematica*-е непосредно потребне за обраду конкретне јединице. Интересовање ученика за рад са рачунаром је порасло након овога. Добијени резултати указују на то да са интересовањем расте и учинак овакве наставе.

Уочљива је тенденција да ученици током рада врше корекције са циљем побољшања технике или крајњег резултата. Рецимо, у задатку са методом половљења интервала, ученица је почела на класичан начин, употребљавајући рачу-

нар као калкулатор али је касније прешла на употребу готове наредбе са пратећег CD-а. Осим тога, у њеном раду је приметно да се границе почетног интервала лако могу сужавати чиме се постиже већа тачност резултата. Наравно, употреба рачунара чини овај поступак лако изводљивим. Још једна од предности употребе рачунара коју не би требало заборавити јесте да се сваки рад може једноставно сачувати за каснију употребу или просто као доказ приликом оцењивања.

Прилагођавање наставне материје рачунарском окружењу

Учење математике у рачунарском окружењу доводи до потребе да се математички концепти преобликују за приказ и употребу на рачунару. Притом, наставник мора да води рачуна о двема стварима: не сме се изменити значење математичког појма и морају се максимално искористити потенцијали рачунара тако да се посматрани појам смислено уклопи (и) у рачунарско окружење. Овде наводимо неколико поступака и дефиниција којима смо увели појмове везане за поменуте методе решавања једначина:

1. Пре почетка обраде приближног решавања једначина потребно је да ученици познају појам непрекидне функције. Како у првом и другом разреду то није случај, приступили смо модификацији тог појма на следећи начин:

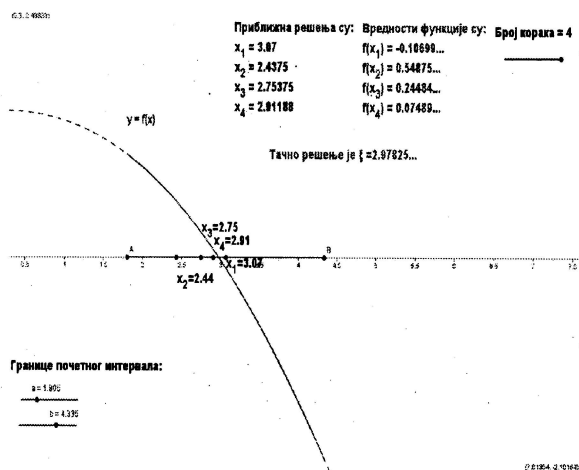
Функција $f(x)$ је непрекидна на интервалу $[a, b]$ ако се за све вредности независно променљиве x са тог интервала график функције може нацртати једним потезом – без подизања оловке са папира.

2. За увод у излагање методе половљења интервала било је корисно ученицима предложити да у графичкој методи уместо одређивања пресечне тачке дођу до њених координата узастопним увеличавањем („зумирањем“) дела цртежа где се налази пресек. Интересантно је да се, иако *GeoGebra* омогућава рад са највише пет децимала, на овај начин добија и шеста а добром проценом чак и седма децимала пресечне тачке. Оваква вежба може бити вишеструко корисна, рецимо:
 - Прво, ученици се на овај начин припремају за методу половљења интервала.
 - Друго, узастопно зумирање места пресека је de facto итеративни процес што значи да се ученици већ у овом периоду уводе у основе итеративних процеса.
 - Треће, код ученика се ствара интуитивна основа за касније поимање појмова низ и гранична вредност низа.
 - Коначно, развија се навика ученика да процењују тражена решења а касније проверавају процене до којих су дошли.
3. Приликом решавања једначина методом сечице уз помоћ програма *Mathematica* са ученицима примећено је да се, у случају извођења већег броја итерација, програм суочава са изразима облика $\frac{1}{0}$, чиме се рад видно успорава или чак прекида, највероватније зато што у итеративној формули долази до одузимања блиских бројева у имениоцу, па им је (након учачавања овог

проблема) препоручено узимање релативно малог броја итеративних корака (5–7).

Осим овога, у програму *GeoGebra* урађене су и апликације у виду динамичних радних листова које су по потреби коришћене приликом обраде ових метода. Током посматраног периода развијена су два начина употребе тих апликација:

У раду са ранијим генерацијама (2002–2006) апликације су коришћене као покретни прикази изучаваних метода. Овим је, истина, умногоме олакшано схватање материје али је самоиницијативност и инвентивност ученика сведена на најмању могућу меру. Уколико би ученик хтео да експериментира са понуђеном апликацијом то је од њега захтевало извесну умешност у програмирању у *GeoGebra*-и. Све је ово било условљено ограничењима самог софтвера.

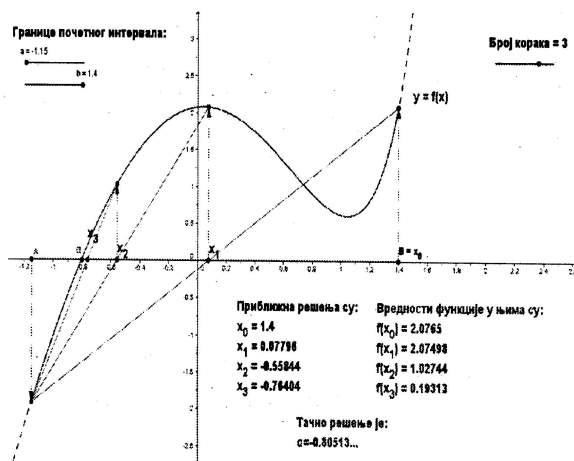


Сл. 1

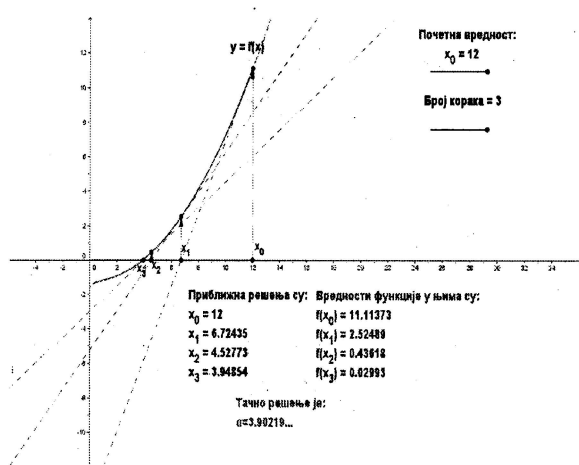
У раду са последњом генерацијом апликације су обogaђене новим могућностима које нуди верзија *GeoGebra 3*. Омогућено је стварање сопствених алата чиме је ученицима понуђена и могућност експериментисања са апликацијом. Тако смо за методу половљења интервала (слика 1), примитивну методу сечице (слика 2), Њутнову методу (слика 3) као и за општи итеративни поступак (слика 4), креирали сопствене алате уз чију помоћ је омогућено вишеструко понављање, брисање и исправљање итеративних корака поменутих метода. На сликама 1, 2, 3 и 4 приказани су прозори *GeoGebra*-е при решавању неких једначина уз помоћ наведених апликација.

Стечена искуства и резултати наставе

Поређења успешности наставе изводимо на основу тестова рађених у току школског двочаса у оквиру редовне наставе. У свим посматраним генерацијама су рађени задаци врло слични онима у уџбенику. Начин оцењивања је био исти у свим тестовима.



Сл. 2



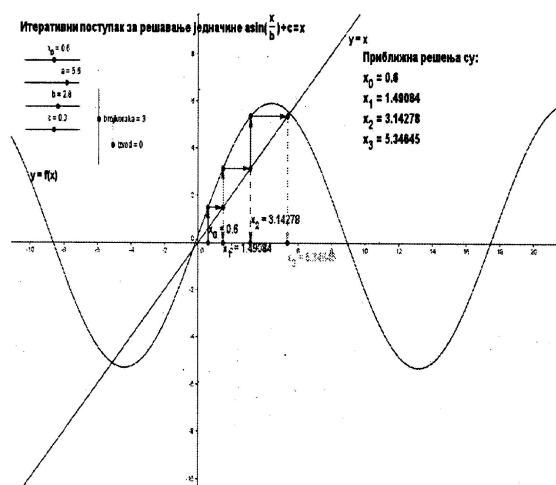
Сл. 3

Успех на тесту посвећеном нумеричком решавању једначина приказан је у табели 1. Очевидно је успех ученика у последње две школске године био бољи.

Школска година	2002/03	2003/04	2004/05	2004/05	2005/06
Број ученика	24	22	13	30	28
Просечна оцена	3,14	3,55	3,25	4,04	4,17

Табела 1.

Школске 2006/07 године радили смо још два теста из нумеричког решавања једначина. Одабрали смо области *Графичка локализација решења* и *Локализација решења алгебарских једначина*. У првом тесту који се односио на графичку



Сл. 4

локализацију решења прву групу смо кроз увежбавање градива охрабривали да користи рачунар потпуно слободно и да експериментише користећи и неке готове програме дате на CD-у уз уџбеник. Другу групу смо пустили да ради по навици, тако да прво проучи теорију и кроз цртање графика, без коришћења готових програма, закључи где су решења. Код другог теста који се односио на локализацију решења алгебарских једначина друга група је радила на начин како је у првом тесту радила прва група, а прва група је у овом тесту радила као друга група у претходном тесту. Табела 2 садржи резултате добијене на описаним тестовима. Очеvidно, примена рачунара у слободнијој форми, уз експериментисање и примену дозвољених готових програма допринела је бољем решавању задатака са теста.

Тестови група	Први тест		Други тест	
	I	II	I	II
број ученика	14	14	14	14
просечна оцена	4,18	2,62	2,50	3,57

Табела 2.

Ограничавање на коришћење рачунара као пратећег алата није довољно да се успешно реше посматрани задаци нумеричке математике. Интересантно је да охрабривање ученика да рачунар користе као извор већег броја информација и програма у једном случају није имало за последицу слично коришћење рачунара и у другом случају. Ученици су, изгледа, очекивали да наставник разради за сваки случај посебно како би требало користити рачунар и све што је уз њега на располагању.

Састављање задатака за контролу и оцењивање наученог градива много је лакше ако се користи рачунар. Задатак одређеног типа садржи неколико параме-

тара који се могу бирати из одређеног скупа и веома једноставним припремама обезбеђујемо сваком ученику посебан задатак. Тиме се онемогућава преписивање решења задатака и сваки ученик се упућује на самосталан рад. Истовремено са састављањем задатака наставник може припремити програм за решавање свих задатака. На тај начин наставник нема проблема са прегледањем већег броја сличних, али ипак различитих задатака.

Закључак

Настава у рачунарском окружењу описана у овом раду може бити од велике помоћи наставницима који желе да примењују рачунаре у настави само ако се из стечених искустава извуку исправни закључци. Не би требало дозволити да се процес наставе одвија стихијски или да драгоцен искуства до којих се дошло мукотрпним радом једноставно остану неискоришћена у наредним циклусима наставе. Како би се оваква настава стално унапређивала потребно је обратити пажњу на постављене циљеве и задатке. Од велике користи би било одредити начине и услове њиховог испуњења. Што се тиче циљева, у светлу изведене наставе битно је напоменути:

1. Прихваћеност излагања материје уз помоћ рачунара и заинтересованост за приближно решавање једначина умногоме зависи од приступа ученицима. Рад са последње две генерације ученика је показао да заинтересованост ученика за материју и рачунарско окружење расте уколико се ученицима дозволи експериментисање и слободна употреба рачунара. Наравно, заједно са заинтересованошћу расте и учинак наставе.
2. Ради одређивања обима и садржаја теме *Приближно решавање једначина* треба тражити средину између могућности ученика да схвате и прихвате наведене садржаје и минимума тих садржаја који би омогућио успешну примену. У том смислу, садржаји ове теме изложени у уџбенику [7] (уз употребу пратећег CD-а) представљају одличну основу за планирање и извођење одговарајуће наставе.

У вези задатака изведеног истраживања стално треба имати на уму користи које би од њега имала свака настава математике у рачунарском окружењу. Зато, на основу овог истраживања изводимо следеће закључке:

1. Ради повећања ефикасности обраде и примене приближног решавања једначина треба инсистирати на томе да је рачунар не само помоћно рачунско средство већ и извор велике количине информација и идеја везаних за дати проблем. Уколико ученици буду имали овакав став, створиће се атмосфера у којој се од рачунара не очекује да реши цео проблем али помаже у извршавању рачунских делова задатака, цртању графика, проверавању хипотеза (једноставним варирањем почетне ситуације) и, често, стварању нових идеја за решавање проблема. Оваква атмосфера омогућава да се извуче максимум и из ученика и из рачунара.
2. Видови наставе који би били најпогоднији у рачунарском окружењу могу варирати од ситуације до ситуације. Међутим, концептом *ја – ти – ми* који су

развили Улм и Баух, обзиром да је лако изводљив у рачунарском окружењу, могу се постићи одлични резултати и из ученика извући оно најбоље. Иако извођење наставе по овом концепту захтева опсежне припреме, он се природно намеће не само на часу већ и у ваншколском изучавању проблема. Фазе *ја* и *ми* овог концепта се могу извести на часу док се последња фаза природно и спонтано развија ван школе. Пример за то су многобројни форуми на интернет страницама математичких образовних софтвера где ученици могу размењивати искуства са милионима корисника истих софтвера.

Оваквим прецизирањем услова и начина за испуњење циљева и задатака спроведеног истраживања будућим наставницима се умногоме олакшава планирање и извођење наставе математике у рачунарском окружењу. Првенствено се мисли на избор и обим градива, избор одговарајућег софтвера, уређење учионице као и избор типова и метода наставе.

Наравно, резултате и искуства добијене на овај начин не треба узети као калуп, као нешто што је једино исправно. Напротив, ово би био само један од предлога како да се то уради и сматрамо да ће се праксом доћи до најпогоднијих путева стицања знања и изграђивања савремене друштвено корисне личности ученика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artigue, M., *Learning Mathematics in a CAS Environment—The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work*, Presentation to the Computer Algebra in Mathematics Education Symposium, Utrecht University, 2002.
2. Bauch, M., *Using Dynamic Mathematical Software in School Lessons*, www.bgsu.edu/colleges/library/cats/newbooks/nbcu2306.htm. (2002)
3. Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., *On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms*, International Journal for Computers in Mathematical Learning, (2003).
4. Ulm, V., *Ich, Du, Wir – ein Lern- und Arbeits Prinzip im Mathematikunterricht*, Praxis Schule, 5–10, 4 (2002), 30–34.
5. *Наставни програм математике за гимназије у Републици Србији*, Архимедес, Београд, 1991.
6. Херцег, Д., *Математика и рачунари у школи*, Технологија, информатика и образовање за друштво учења и знања, Зборник радова, 470–475, Нови Сад, 2007.
7. Херцег, Д., Херцег, Ђ., *Нумеричка математика*, Stylos, Нови Сад, 2003.

Институт за математику и информатику, Природно-математички факултет, Трг Д. Обрадовића 4, 21000 Нови Сад

E-mail: hercegd@im.ns.ac.yu

Гимназија „Јован Јовановић Змај“, Нови Сад