Зорица Маловић

ЗАДАТАК УРАЂЕН НА ВИШЕ НАЧИНА

Исти задатак могуће је решавати на више начина. Некада се то постиже различитим идејама у оквиру исте области. На пример:

- квадратни трином се може раставити на чиниоце свођењем на разлику квадрата, трансформацијом линеарног члана па груписањем, применом Безуове теореме итд,
- тригонометријски задатак се може решити применом различитих група формула,
- конструктивни задатак се може урадити на стандардан начин или уз помоћ изометријских трансформација.

Некада се задатак може урадити коришћењем различитих приступа, тј. области, уз употребу одговарајућих средстава. Геометријски задаци су погодни јер им се може прићи средствима елементарне геометрије, тригонометријски, алгебарски, векторски, преко аналитичке геометрије, преко комплексних бројева.

На једном матурском испиту из математике, на природно-математичком смеру у Деветој гимназији „Михаило Петровић-Алас", у некој од варијанти писмених задатака, поставила сам следећи задатак.

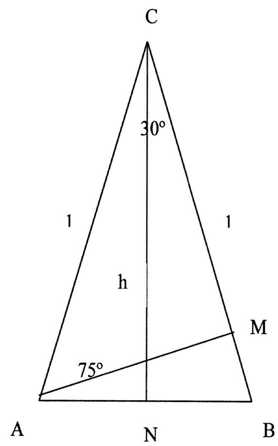
Дат је једнакокраки троугао коме су краци дужине 1*, а угао између њих* 30°*. Израчунати висину која одговара основици.*

Идеја ми је била да се искористе адиционе формуле за израчунавање $\sin 75^\circ$ или косинусна теорема. Већина ученика је задатак урадила коришћењем стандардних формула из планиметрије и свела израчунавање висине на биквадратну једначину. Задатак је могуће урадити на више начина, од којих ми се овај „њихов" чини најкомпликованијим. Овде ће бити приказано пет могућих приступа.

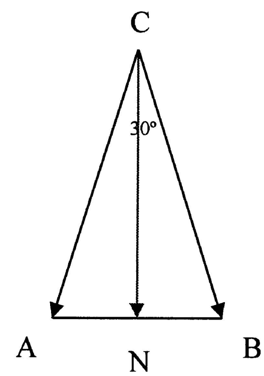
1. начин. $\sin 75^\circ = \dfrac{h}{AC} = \dfrac{h}{1}$, $h = \sin 75^\circ$ (сл. 1). Користи се адициона формула $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ за израчунавање $\sin 75^\circ$.

$$\begin{aligned} h &= \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}. \end{aligned}$$

Одговор: $h = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.



Сл. 1



Сл. 2

2. начин. Применом косинусне теореме на троугао ABC добија се

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 30^\circ = 1 + 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

$AB = \sqrt{2-\sqrt{3}}$. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ANC добија се

$$h^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{4-(2-\sqrt{3})}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Одговор: $h = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. (Лако се показује да су одговори у 1. и 2. начину исти, тј. важи $\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.)

3. начин. Из темена A спустимо висину на крак BC. Подножје висине је тачка M (сл. 1). Троугао AMC је правоугли са хипотенузом дужине 1 и једним углом од 30°, па је $AM = 1 \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ и $P_\triangle = \dfrac{BC \cdot MA}{2} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{ah}{2}$.

Из правоуглог троугла ANC се применом Питагорине теореме добија $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + h^2 = 1$. Последње две једначине образују систем из којег се добија тражена висина. Елиминацијом странице a за непознату h се добија биквадратна једначина

$$16h^4 - 16h^2 + 1 = 0.$$

Од два позитивна решења те једначине $h_{1,2} = \sqrt{\dfrac{2 \pm \sqrt{3}}{4}}$ оно са знаком $-$ отпада, јер је у том случају $\dfrac{a}{2} \geqslant h$, што је немогуће, јер наспрам већег угла у троуглу (ANC) лежи већа страница.

Одговор: $h = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

4. начин. За решавање задатка може се користити скаларни производ вектора (сл. 2).

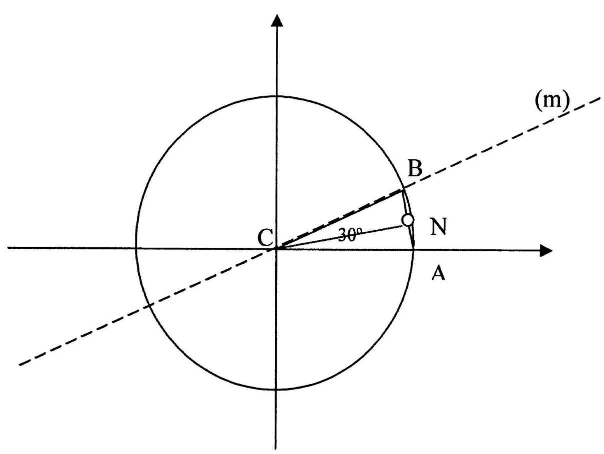
$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}), \quad |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = 1, \quad \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 30^\circ,$$

$$|\overrightarrow{CN}| = \sqrt{\frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}} = \sqrt{\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 2\cos 30^\circ + 1}}{2} = \frac{\sqrt{1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Одговор: $h = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

5. начин. Задатак се може урадити методама аналитичке геометрије у равни (сл. 3).



Слика 3

Користи се једначина $x^2 + y^2 = 1$ круга (k) коме је центар тачка $C(0,0)$ и полупречник 1. Једначина праве (m) која пролази кроз координатни почетак и заклапа са позитивним смером x-осе угао од 30° гласи $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$. Координате тачке B добијају се решавањем система који чине једначине праве и круга, с тим да се узима пресек у првом квадранту, па је $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Тачка N је средиште дужи с крајевима $A(1,0)$ и B, па су њене координате аритметичке средине координата тачака A и B, $N\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$. Висина троугла се добија као растојање тачака C и N,

$$h^2 = d^2(C,N) = \left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Одговор: $h = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Задатак је могуће радити, применом појединих начина, са ученицима другог и трећег разреда приликом обраде одговарајућих тема (нпр. адиционе формуле, косинусна теорема, скаларни производ, једначина круга, ...).

У неким школама је пракса да се у другом полугодишту матурантима држи додатна настава, да би им се олакшала припрема за матурски испит или за пријемни испит за упис на факултете. Овај задатак, урађен на свих пет начина, може корисно послужити у те сврхе. За тако нешто је потребан један двочас.

Ученике треба подржавати у налажењу сопствених начина, приликом решавања задатака. То се постиже истицањем и анализом њихових идеја. Тако им се развија креативност и самопоуздање, па неће тако често питати да ли ће им се признати задатак ако га ураде другачије него што је професор урадио.