Драгољуб Милошевић

ПАСКАЛОВ ТРОУГАО[1]

Троугаона таблица бројева на сл. 1 назива се *Паскалов троугао*[2]. Чланове Паскаловог троугла добијамо на следећи начин: први и последњи члан реда је 1, а остале чланове добијамо сабирањем по два члана из претходног реда, и то оног који је изнад траженог члана и оног који му претходи.

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	1					
(1)	1	1				
(2)	1	2	1			
(3)	1	3	3	1		
(4)	1	4	6	4	1	
(5)	1	5	10	10	5	1
	...	...	...	...	...	...

Сл. 1

Паскалов троугао се, између осталог, користи:

а) у одређивању коефицијената који представљају степен бинома у развијеном облику;

б) за одређивање броја подскупова са по k елемената скупа од n елемената;

в) у извесним проблемима вероватноће;

г) за добијање неких бројева који представљају степен неког природног броја, независно од избора основе бројевног система.

Лако се уверавамо да се бројеви из првих неколико редова Паскаловог троугла могу представити и онако како је то учињено у таблици на сл. 2. При томе код разломака којима су у тој таблици представљени чланови Паскаловог троугла уочавамо извесну законитост, коју и са̂м читалац може да установи. Та законитост

[1] Материјал погодан за обраду у додатној настави

[2] Блез Паскал (1623–1662), француски математичар и физичар

важи и за чланове осталих редова из Паскаловог троугла.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & (0) & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\
(0) & 1 & & & & & \\
(1) & 1 & \frac{1}{1} & & & & \\
(2) & 1 & \frac{2}{1} & \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2} & & & \\
(3) & 1 & \frac{3}{1} & \frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} & \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3} & & \\
(4) & 1 & \frac{4}{1} & \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} & \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} & \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} & \\
(5) & 1 & \frac{5}{1} & \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} & \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} & \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} & \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Сл. 2

Члан из n-тог реда и k-те колоне добија се по формули

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}.$$

На пример, за $n = 5$ и $k = 3$ је $n - k + 1 = 3$, па је $C_3^5 = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$, тј. у пресеку петог реда и треће колоне добијамо број 10. Провери у таблици (сл. 2).

1. Ако израчунамо степене бинома $A + B$, добијамо редом:

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^0 = 1,\\
&(A+B)^1 = 1\cdot A + 1\cdot B,\\
&(A+B)^2 = 1\cdot A^2 + 2\cdot AB + 1\cdot B^2,\\
&(A+B)^3 = 1\cdot A^3 + 3\cdot A^2B + 3\cdot AB^2 + 1\cdot B^3,\\
&(A+B)^4 = 1\cdot A^4 + 4\cdot A^3B + 6\cdot A^2B^2 + 4\cdot AB^3 + 1\cdot B^4,\\
&(A+B)^5 = 1\cdot A^5 + 5\cdot A^4B + 10\cdot A^3B^2 + 10\cdot A^2B^3 + 5\cdot AB^4 + 1\cdot B^5,\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Као што видимо, коефицијенти се у развијеном степену бинома управо ређају као у таблици на сл. 1.

2. Посматрајмо нпр. скуп $S = \{a, b, c, d\}$. Овај скуп има, очигледно, као подскупове један празан скуп $\varnothing$ и један четворочлани скуп $\{a, b, c, d\}$. Једночланих подскупова има колико и елемената, што значи да четворочлани скуп S има 4 једночлана подскупа. Како се издвајањем по једног елемента из скупа S добија (од преосталих чланова) увек по један подскуп од $4 - 1 = 3$ члана, закључујемо да је и број ових (трочланих) подскупова 4.

Ако се по један члан скупа S комбинује са по једним од преосталих чланова, добијају се двочлани подскупови овог скупа. Има их $4 \cdot 3$, али … Како се повезивањем неког елемента с неким другим, а затим тог другог елемента са оним првим, добија исти подскуп[3], то је број ових подскупова двапут мањи: $(4 \cdot 3) : 2 = 6$.

Дакле, четворочлани скуп има подскупова:

празних	једночланих	двочланих	трочланих	четворочланих
1	4	6	4	1

Провери 4. ред у Паскаловом троуглу (сл. 1)!

Резонујући на сличан начин, долазимо до закључка: *бројеви из n-тог реда Паскаловог троугла показују колико има празних, једночланих, двочланих, итд. подскупова скупа од n елемената.*

Такође, важи и ово: *број свих подскупвоа n-точланог скупа износи* 2^n. На пример, петочлани скуп има укупно $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$ подскупова (в. пети ред Паскаловог троугла).

3. Ако новчић бацимо у ваздух, можемо да се надамо да исти падне на „грб" (Г), или на „број" (Б). Искуство нас учи да ће код великог броја бацања приближно исто толико пута пасти „грб" колико пута и „број", тј. у два бацања просечно падне једанпут „грб". Вероватноћа да ће приликом бацања пасти „грб" износи управо 50%, или 1/2 (и да је толика вероватноћа да ће пасти „број")[4].

Број бачених новчића	Могућности падања новчића	Вероватноћа
1	Г или Б (1 „грб" или 1 „број")	1/2
2	2 пута Г 1 пута Г и 1 пута Б 2 пута Б	1/4 2/4 (1/2) 1/4
3	3 пута Г 2 пута Г и 1 пута Б 1 пута Г и 2 пута Б 3 пута Б	1/8 3/8 3/8 1/8
4	4 пута Г или Б 3 пута Г или Б 2 пута Г или Б	1/16 4/16 6/16
5	5 пута Г или Б 4 пута Г или Б 3 пута Г или Б	1/32 5/32 10/32

Уочавамо да се бројиоци наведених разломака налазе у одговарајућем реду Паскаловог троугла. На пример, ако бацимо 5 новчића, тада у 5. реду очитавамо тражени бројилац а именилац је 5. степен броја 2, тј. 2^5.

[3] На пример, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

[4] Под математичком вероватноћом подразумева се број $V = \dfrac{p}{m}$, где је p број повољних и m број свих могућих случајева

4. Напишимо цифре из нултог и прва четири реда Паскаловог троугла – без прекида (сл. 3). Уочавамо да су бројеви из нултог, првог, другог, трећег и четвртог реда по редоследу нулти, први, други, трећи и четврти степен броја 11. Да ли наведено правило важи за следеће редове Паскаловог троугла?

(0)	1	11^0
(1)	11	11^1
(2)	121	11^2
(3)	1331	11^3
(4)	14641	11^4

Сл. 3

Уочимо број 121 (сл. 3). Тај број је занимљив по томе што представља потпун квадрат за било коју основу бројевног система (а не само за основу 10: $121 = 11^2$). Ако је основа бројевног система x, $(x > 2)$, имамо:

$$121_{(x)} = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = (x+1)^2.$$

Такође, имамо:

$$1331_{(x)} = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 = (x+1)^3, \quad x > 3$$

и

$$14641_{(x)} = 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 = (x+1)^4, \quad x > 6.$$

Уочавамо да је број 1331 куб неког броја а 14641 четврти степен неког броја, без обзира на основу бројевног система. На пример, имамо:

$$1331_{(5)} = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 6^3,$$
$$14641_{(8)} = 1 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 1 = 9^4.$$

Искажи ово речима!

Задаци

1. Одреди непосредно број:

а) четворочланих подскупова шесточланог скупа,

б) трочланих подскупова скупа од 20 елемената.

2. Колико је укупан број подскупова шесточланог скупа?

3. У развоју $(x+y)^7$ нађи коефицијент уз x^4y^3.

4. Ако бацимо 8 новчића, колика је вероватноћа да се појави комбинација: трипут „број“ и пет пута „грб“?

5. Утврди који троцифрени (четвороцифрени) бројеви представљају квадрат (куб) двоцифреног броја за свако x које је такво да запис $\overline{ABC}_{(x)}$ $(\overline{ABCD}_{(x)})$ има смисла.

6. Елементи друге колоне Паскалаовог троугла (сл. 1) имају својство: апсолутна вредност разлике квадрата ма која два узастопна броја из друге колоне представља куб једног природног броја. Провери ово својство на неколико примера.