Милан Живановић

РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА
(један проблем из стереометрије)

Један од највише коришћених метода учења у математици је свакако решавање проблема (проблемска настава). То поготово важи у додатној настави у раду са даровитима.

У процесу учења овом методом се максимално активирају интелектуални потенцијали ученика укључујући примену свих стечених знања и метода. Проблемски задаци су најчешће задаци конструкција неких фигура, израчунавање њихових метричких својстава, прављење алгоритама за решавање неких практичних проблемских ситуација али и одређивање других карактеристика везаних за разне математичке објекте (прављење стратегије за добијање неке игре, изучавање особина разних скупова бројева и операција са њима итд.).

Амерички математичар мађарског порекла Ђерђ Поја у својој књизи „Како ћу решити математички задатак?“ [1] даје и на примерима објашњава један општи алгоритам за решавање математичких проблема. Тај алгоритам се састоји у следећем

I Фаза – разумевање задатка

– Шта је непознато? Шта је задато? Како гласи услов?
– Да ли је могуће задовољити услов? Дали је услов довољан за одређивање непознате? Можда је предодређен? Или контрадикторан?
– Нацртај слику. Уведи препознатљиве ознаке.
– Растави разне делове услова. Можеш ли их написати?

II Фаза – прављење плана

– Да ли си задатак већ видео? Да ли си видео исти задатак у другачијем облику?
– Да ли си видео сличан задатак? Која би ти теорема могла помоћи?
– Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту непознату.
– Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен. Можеш ли га употребити?

– Можеш ли да другачије формулишеш задатак? Да ли га је могуће изразити на још неки начин? Врати се на дефиниције.
– Можеш ли да се сетиш неког лакшег задатка који му је сличан? Општији задатак? Специфичнији задатак? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део задатка, а убаци други део; када је непозната тако одређена може ли се мењати? да ли из датих података можеш извући нешто употребљиво? Да ли можеш да се сетиш неких других података који би ти помогли у одређивању непознате? Да ли можеш да промениш непознату или податке тако да ти нова промењлива и нови подаци буду међусобно ближи?
– Да ли си искористио све задато? Да ли си искористио услов у потпуности? Да ли си узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?

III Фаза – примена плана

– Када користиш план решавања, контролиши сваки корак.
– Можеш ли јасно видети да је корак исправан?
– Можеш ли доказати да је исправан?

IV Фаза – провера

– Можеш ли проверити резултат? Можеш ли проверити доказ?
– Можеш ли резултат извести другачије? Можеш ли га уочити на први поглед?
– Можеш ли резултат или доказ применити на неком другом задатку?

Применимо овај алгоритам на следећи проблем.

Задатак. Изразити запремину правилног додекаедра у функцији његове ивице.

Решење. I фаза – разумевање задатка.

Прво закључујемо да проблем даје једнозначно решење. Нацртајмо слику тела (слика 1) тако да елементи који су битни у процесу решавања буду уочљиви и са које је могуће успоставити везу између датих и потребних елемената.

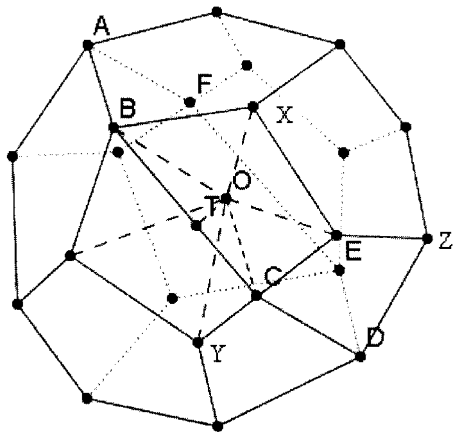
II фаза – прављење плана.

Додекаедар је могуће разложити на 12 правилних петостраних пирамида којима је база страна додекаедра, а врх центар додекаедра. Задатак се своди на одређивање запремине једне такве пирамиде.

Општа формула за израчунавање пирамиде научена је већ у основној школи. Потребно је израчунати површину базе пирамиде тј. правилног петоугла. Поступак изводљив као последица примене тригонометрије на решавање правоуглог троугла.

Следеће.

Уочити пресек $ABCDEF$ и у оквиру њега правоугли троугао OTC. Дуж TC можемо лако добити из другог правоуглог троугла TCE јер је познат угао $\angle ETC$.



Слика 1

Угао $\angle TCO$ је половина угла између страна додекаедра који ћемо одредити применом косинусне теореме на триедар $EXYZ$. После овог закључка отвара се пут за решавање ...

III фаза – примена плана.

У решавању овог задатка биће нам потребна косинусна теорема за триедар. Зато најпре формулишимо и дајмо доказ те теореме (видети и чланак М. Бељића [2] у претходном броју *Наставе математике*).

Косинусна теорема за триедар. *Нека је дат произвољан триедар $Oabc$. Са α, β, γ обележимо стране наспрам ивица a, b, c (углови са теменом O којима су краци ивице триедра). Углове диедара обележимо истим словом као и одговарајућу ивицу Тада је:*

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Доказ. На ивицама a, b одредимо тачке A, B тако да је $OA = OB = 1$. По косинусној теореми је

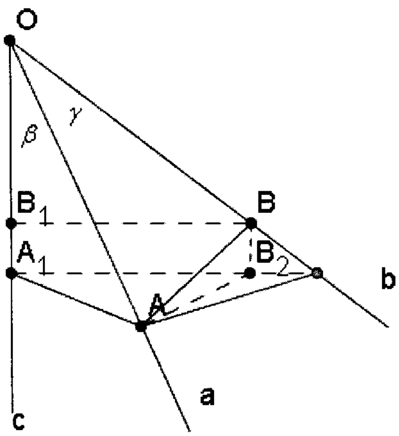
$$AB^2 = 1 + 1 - 2\cos\gamma.$$

Сада одредимо AB на други начин. Тачке A, B пројектујмо нормално на ивицу c. Одговарајуће пројекције обележимо A_1, B_1, а са B_2 означимо пројекцију тачке B на праву кроз A_1 паралелну са BB_1 (слика 2). Опет по косинусној теореми за $\triangle A_1AB_2$ имамо:

$$AB_2^2 = AA_1^2 + A_1B_2^2 - 2AA_1 \cdot A_1B_2\cos c.$$

Међутим, имамо да је $AA_1 = \sin\beta$, $A_1B_2 = BB_1 = \sin\alpha$, што заменом у последњу једнакост даје:

$$AB_2^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos c.$$



Слика 2

На $\triangle ABB_2$ применимо Питагорину теорему $AB^2 = AB_2^2 + B_2B^2$ и користећи чињеницу да је $BB_2 = B_1A_1 = |\cos\alpha - \cos\beta|$ добијамо:

$$\begin{aligned} AB^2 &= \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos c + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta \\ &= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos c. \end{aligned}$$

Изједначавањем прве и последње једнакости за AB^2 и сређивањем добија се тражена формула

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Сада прелазимо на директно извођење плана. Дакле, додекаедар разлажемо на 12 правилних петостраних пирамида којима је база једна страна додекаедра, а врх у центру додекаедра. Израчунајмо запремину једне такве пирамиде. У ту сврху уочимо пресек $ABCDEF$ додекаедра са равни која садржи две његове супротне ивице AB и DE (слика 1). Посматрамо пирамиду којој је основа петоугао са осом симетрије BC (у првом плану). Висина те пирамиде је дуж OT.

Из троугла $\triangle OTC$ имамо да је

$$TC = \frac{a}{2}\operatorname{ctg} 36^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}},$$

па за површину петоугла (базу пирамиде) израчунавамо:

$$B = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{2}}.$$

Висина пирамиде је

$$OT = CT\operatorname{tg}\angle BCO = CT\operatorname{tg}\frac{\angle BCD}{2}.$$

Применом косинусне теореме за триедар $EXYZ$ израчунаћемо угао између страна додекаедра:

$$\begin{aligned}\cos 108^\circ &= \cos^2 108^\circ + \sin^2 108^\circ \cos\angle BCD\\ -\sin 18^\circ &= \sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ \cos\angle BCD\\ \cos\angle BCD &= \frac{-\sin 18^\circ - \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ}\end{aligned}$$

Даље је:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{\angle BCD}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\angle BCD}{1+\cos\angle BCD}} = \sqrt{\frac{\cos^2 18^\circ + \sin 18^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos^2 18^\circ - \sin 18^\circ - \sin^2 18^\circ}}\\ &= \sqrt{\frac{1+\sin 18^\circ}{\cos 36^\circ - \sin 18^\circ}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt5-1}{4}}{\frac{\sqrt5+1}{4}+\frac{\sqrt5-1}{4}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}}.\end{aligned}$$

Сада израчунавамо висину пирамиде:

$$H = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt5}{5-\sqrt5}}\cdot\sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{3+\sqrt5}{\sqrt{10-2\sqrt5}}.$$

Дакле, запремина додекаедра је:

$$V = 12\,\frac{BH}{3} = 4\,BH = 4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt5}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{3+\sqrt5}{\sqrt{10-2\sqrt5}}.$$

Сређивањем последњег израза добија се коначна формула:

$$V = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt5).$$

IV фаза – провера.

Резултат можемо проверити рецимо на сајту `http://mathworld.wolfram.com`. На том сајту је дато и друго решење. Сличан поступак је могуће применити рецимо на одређивање запремине правилног икосаедра, за одређивање полупречника описане и уписане сфере правилног додекаедра или икосаедра.

Задаци за вежбање

1. Израчунати запремину икосаедра ивице a.
2. Одредити полупречнике описаних сфера око правилних полиедара ивице a.
3. Одредити полупречнике уписаних сфера у правилне полиедре ивице a.
4. Тежишта страна правилног икосаедра су темена додекаедра. Изразити запремину додекаедра у функцији ивице икосаедра.
5. Тежишта страна правилног додекаедра су темена икосаедра. Изразити запремину икосаедра у функцији ивице додекаедра.

6. Над сваком страном правилног додекаедра конструисана је правилна једнакоивична петострана пирамида. Врхови ових пирамида представљају темена икосаедра. Изразити његову запремину у функцији ивице додекаедра.
7. Нека је α угао између страна правилног додекаедра, а β угао између страна правилног икосаедра. Доказати да је $\operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2}$.

Литература

1. G. Polya: *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb 1966.
2. М. Бељић: *Косинусна теорема за тетраедар*, Настава математике LI, 3–4, 40–42.
3. С. Огњановић, Ж. Ивановић, *Стереометрија*, Круг, Београд, 2004.

ОБАВЕШТЕЊА

САСТАНАК УПРАВНОГ ОДБОРА ДМС

Редован састанак Управног одбора Друштва математичара Србије одржан је у Београду 14. фебруара 2007. године. Осим својих текућих послова, Управни одбор је усвојио одлуку о избору делегата за Изборну скупштину ДМС која ће се одржати јануара 2008. године. Према тој одлуци, Управни одбор ће одредити број делегата сваке од подружница на свом састанку средином октобра 2007. године, на основу стања регистрованих чланова у том тренутку. Тада ће Скупштина бити и званично заказана.

Одређена је чланарина за 2007. годину у износу од 500 динара.

Управни одбор је изабрао чланове Издавачког савета Друштва математичара Србије.