Др Војислав Андрић

РАД СА ДАРОВИТИМА У ТОКУ РЕДОВНЕ НАСТАВЕ

1. Увод

У наставној пракси код нас и у свету рад са даровитима се одвија кроз разне облике додатног рада (додатна настава, градске школе за талентоване ученике, летње и зимске школе младих математичара, припреме за математичка такмичења, ...) или неки од облика самосталног рада ученика (коришћење математичких часописа, рад са математичком литературом, коришћење Интернета, учешће на математичким такмичењима, ...).

Међутим, сваки, па и за математику обдарени ученик, највећи део свог радног ангажовања проводи у школи и зато је циљ овог текста да прикаже неке могућности рада са даровитима у оквиру најфреквентнијег облика наставног рада – редовне наставе математике.

2. Диференцирани приступ редовној настави

Рад са даровитим ученицима кроз редовну наставу математике најчешће се реализује методом решавања проблема, при чему се користи групни или индивидуални облик рада. Такав начин рада је у нашим школама прилично коришћен и углавном се одвија кроз диференцирање захтева, при чему се диференцијација, најчешће, врши у три правца:

- додатни захтеви при фронталном наставном раду;
- групни рад у оквиру редовне наставе;
- диференцирани домаћи задаци.

Диференцирање захтева илуструјемо на примеру наставне теме „Алгебарске трансформације полинома“ која је у програму у 1. разреду средње школе. Алгебарске трансформације полинома примењују се на наставни садржај „Решавање Диофантових једначина коришћењем производа и збира“.

Суштина примене је да се дата Диофантова једначина $A(x,y,\dots) = B(x,y,\dots)$, где су $x,y,\dots$ цели бројеви, низом алгебарских трансформација преведе у еквивалентни облик $A_k(x,y,\dots) = B_k$, тако да је $A_k(x,y,\dots)$ израз који представља производ два или више једноставнијих алгебарских израза, а B_k целобројна константа чија је канонска факторизација позната. У случају збира,

$A_k(x, y, \dots)$ се може представити као збир квадрата, апсолутних вредности израза или израза који су природни бројеви, а B_k је целобројна константа која представља збир квадрата или апсолутних вредности неколико целих бројева. Као илустрацију поступака наводимо следеће примере[1].

Пример 1. Одредити целе бројеве x и y тако да је $x^2 - y^2 = 12$.

Решење. Како је $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 12 = 2^2 \cdot 3$, разликују се следећи случајеви: $(x+y)(x-y) = 12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3$. Бројеви $x+y$ и $x-y$ морају бити исте парности, па је једини случај који долази у обзир $(x+y)(x-y) = 6 \cdot 2$. Тада се добијају четири опције: $x+y=6$ и $x-y=2$; $x+y=-6$ и $x-y=-2$; $x+y=2$ и $x-y=6$; $x+y=-2$ и $x-y=-6$. Сва решења једначине су $(x, y) \in \{(4,2), (4,-2), (-4,2), (-4,-2)\}$. $\triangle$

Пример 2. Одредити све целе бројеве x и y тако да је $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Решење. Ако се дата једначина помножи са 2, добија се еквивалентна једначина $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$, односно $x^2 + (x+y)^2 = 2$. Збир квадрата три цела броја је једнак 2 ако су два од тих бројева једнаки 1, а трећи 0, па се разликују три могућности:

1) $x^2 = 1$, $(x+y)^2 = 1$ и $y^2 = 0$. Решења су $(1,0)$ и $(-1,0)$.

2) $x^2 = 1$, $(x+y)^2 = 0$ и $y^2 = 1$. Решења су $(1,-1)$ и $(-1,1)$.

3) $x^2 = 0$, $(x+y)^2 = 1$ и $y^2 = 1$. Решења су $(0,1)$ и $(0,-1)$.

Решења дате једначине су $(x, y) \in \{(1,0), (-1,0), (1,-1), (-1,1), (0,1), (0,-1)\}$.

2.1. Наставни сценарио

Наставни сценарио који излажемо и довољно детаљно приказујемо као илустрацију рада са даровитима у редовној настави, ради рационалности, обједињује сва три могућа дидактичко-методичка модела. Наглашавамо да је при реализацији редовне наставе, а наравно и уопште, могуће рад са обдаренима реализовати и искључивом применом једног модела или, како то у наставној пракси најчешће бива, плодотворном комбинацијом расположивих модела.

РАЗРЕД:	1. разред гимназије природно-математичког смера
ВРСТА НАСТАВЕ:	Редовна настава
НАСТАВНА ТЕМА:	Рационални алгебарски изрази
НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА:	Идентичне трансформације полинома
ОБРАЗОВНИ ЦИЉЕВИ:	Упознате методе растављања полинома на чиниоце (сабирке) применити на решавање Диофантових једначина
ТИП ЧАСА:	Час увежбавања и примене стечених знања
НАСТАВНИ МЕТОД:	Експериментални метод (проблемска настава)
ОБЛИК НАСТАВНОГ РАДА:	Фронтални и групни
НАСТАВНА СРЕДСТВА:	Збирка задатка и наставни листићи

[1] Суштина овог текста није у приказу решавања Диофантових једначина, већ у дидактичко-методичком осмишљавању диференцираних захтева.

У уводном делу часа кратко се обнављају садржаји везани за упознате методе растављања полинома на чиниоце (примена дистрибутивног закона, квадрат збира и разлике, разлика квадрата, збир и разлика кубова) и наговештава њихова примена на разноврсне математичке проблеме.

У првом делу часа реализује се настава по дидактичко-методичком моделу:

2.2. Додатни захтеви при фронталном моделу

Основа овог модела је да у оквиру проблема (а) који је фронтално презентиран свим ученицима, поједини ученици добијају у оквиру истог задатка и додатне захтеве (б), (в), ... који могу, али и не морају имати очигледну повезаност. У овом делу наставног рада решавају се следећи проблеми:

Задатак 1. (а) Раставити на чиниоце полином $xy-3x-5y+15$.

(б) Одредити све парове (x,y) целих бројева тако да је $xy-3x-5y+12=0$[2].

Задатак 2. (а) Полином x^2+2x+y^2-4y+5 приказати као збир квадрата два бинома.

(б) Одредити све парове (x,y) целих бројева тако да је $x^2+2x+y^2-4y+5=0$.

(в) Одредити све парове (x,y) целих бројева тако да је $x^2+y^2=4y-2x$.

Задатак 3. (а) Раставити на чиниоце полином $4x^2-9y^2$.

(б) Одредити све парове (x,y) целих бројева тако да је $4x^2-9y^2=108$.

(в) Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $4^x-9^y=7$?

У прва два примера захтеви (а), (б) (и (в)) су очигледно повезани, а у трећем је то делимично видљиво. Сигурно је да се од ова три примера може направити осам независних проблема, поређаних у дидактичком низу од лакшег ка тежем, који могу бити понуђени свим ученицима да их решавају сопственим темпом, тако да рад са одабраним ученицима ни у ком случају не омета рад са осталим ученицима, а да се при том, увежбавајући алгебарске трансформације полинома, доста тога уради и на плану веома активног рада на Диофантовим једначинама.

У другом делу часа настава се реализује по дидактичко-методичком моделу:

2.3. Групни рад у оквиру редовне наставе

Могућност унеколико различита од претходне је да се, док остали ученици нешто споријим темпом решавају једноставнији проблем по проблем, једној групи даровитих ученика поделе наставни листићи са посебно одабраним проблемима који подразумевају решавање Диофантових једначина коришћењем разних врсте алгебарских трансформација. Структура једног таквог наставног листића дата је кроз неколико следећих примера.

Задатак 4. Може ли се број 100 и на колико начина приказати као:

(а) разлика квадрата два природна броја; (б) збир квадрата два природна броја; (в) производ два узастопна природна броја?

[2] У овом тексту сви задаци су дати без решења, јер суштина је у функцији задатка, а не у његовом решавању. При том је већина задатака решена у [1].

Задатак 5. Одредити природан број n и прост број p тако да је $5p+1 = n^2$.

Задатак 6. Постоје ли цели бројеви x и y такви да је $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$?

Задатак 7. Одредити природан број n тако да је $n^2+2n+13$ квадрат неког природног броја.

Задатак 8. Одредити природан број n и прост број p тако да је $p = n^4 + 4$.

Задатак 9. Постоје ли цели бројеви x, y и z такви да је $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 24$?

При реализацији овог дела часа наставник има задатак да константно комуницира са ученицима који раде по датим наставним листићима, разговара о могућим идејама за решења, даје упутства и контролише тачност урађеног. Ученици раде максимално могућим темпом, а задаци који се не ураде током часа остају за домаћи задатак.

У завршном делу часа наставник ученицима задаје домаћи задатак из збирке задатака, а група обдарених добија путем фотокопираног материјала, дискете или интернетом, посебан домаћи задатак.

Оно што је заједничко за сва три дидактичко-методичка модела је и избор задатака, који се одвија у складу са свим дидактичким принципима, а посебно са принципом поступности: то значи да се избор задатака врши од ближег ка даљем, од лакшег ка тежем, од једноставнијег ка сложенијем, од познатог ка непознатом[3].

2.4. Диференцирани домаћи задаци

Проблем рада са даровитима у оквиру редовне наставе може се решити и диференцираним домаћим задацима, где одабрани, талентовани ученици не добијају задатке који су идентични са осталима, него посебно припремљене проблеме. Структура једног таквог домаћег задатка дата је кроз неколико следећих примера.

Задатак 10. Постоји ли прост број p који се може приказати у облику $8n^2 + 10n + 3$, где је n неки цео број?

Задатак 11. Постоје ли цели бројеви n и k такви да је $n^3 - n + 2^n = 1992k$?

Задатак 12. Одредити све природне бројеве облика $\overline{222\ldots222}$ који се могу представити у облику збира или разлике квадрата два природна броја.

Задатак 13. Ако је n природни број и p прост број, решити једначину $n^5 + n^4 + 1 = p$.

Задатак 14. (а) Полином $2x^2 + 2y^2$ приказати као збир квадрата два полинома.

(б) Доказати да једначине $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имају једнак борј решења у скупу природних бројева.

(в) Доказати да једначина $x^2+y^2 = 2^k$ ($k \in \mathbf{N}$) има бесконачно много решења у скупу целих бројева.

---

[3] Читаоцима овог текста препоручујемо да самостално реше све дате задатке (1–17) и сами се увере у поступност при њиховом избору. Али и да покушају да између датих задатака уметну нове који су им познати из математичке литературе или које се сами конструисали.

Задатак 15. Одредити све целе бројеве x, y и z који задовољавају једнакост $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=6$.

Задатак 16. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $2^x+1=y^2$? Колико има решења?

Задатак 17. Природан број n је такав да су бројеви $2n+1$ и $3n+1$ квадрати природних бројева. Доказати да је број $5n+3$ сложен.

Наведени примери показују како се практично, комбиновањем ова три дидактичко-методичка модела, може кроз редовне наставне активности реализовати читава једна наставна тема, као што је „Решавање Диофантових једначина коришћењем производа“. Приказани модели илуструју и могућност да се наставни облици рада у којима су углавном даровити у пасивном положају, искористе за једну сасвим другачију активну улогу у којој се једнолична и једноставна репродукција садржаја замењује креативним односом и учењем путем решавања проблема.

Међутим, сви наведени модели се могу успешно користити, осим редовне наставе, и у другим облицима рада да даровитима, при чему и изабрани садржаји рада могу бити најразноврснији (теорија бројева, неједнакости, елементарна геометрија, комбинаторика, ...).

Литература

[1] В. Андрић: *Диофантове једначине – приручник за додатну наставу у основним и средњим школама*, ИП „Круг“, Београд, 2006.

[2] В. Андрић: *Диофантове једначине – приручник за наставнике у основним и средњим школама*, Самостално издање, Ваљево, 2006.

[3] Ш. Арсланагић: *Аспекти наставе математике за надарене ученике средњошколског узраста*, Удружење математичара БиХ, Сарајево, 2001.

[4] Р. Никчевић: *Учење путем решавања проблема у елементарној настави математике*, „Научна књига“, Београд, 1977.

[5] Дж. Пойа: *Математическое открытие*, „Наука“, Москва, 1976.