

Мр Ђоко Г. Марковић

## ГЕОМЕТРИЈСКИ ПОЛИФОРМИЗАМ

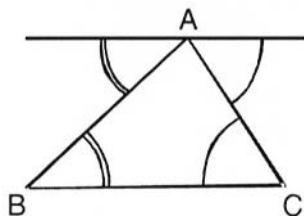
Основни циљ овог рада, да геометријске полиформизме прикаже у функционалној вези са разбијањем формализма у настави математике има главну тачку ослоња у чињеници, да сликовито мишљење код ученика „рађа аха доживљаје“, дакле у једном тренутку „бљесак“ комплетне јасноће. Интерпретација неког математичког проблема, кога је могуће полиформно геометријски тумачити, омогућава један динамички приступ самом проблему, тј. датом феномену, што производи његово свеобухватно и суштинско поимање и разумијевање. Имајући ово у виду дошао сам на идеју да кроз једну до сада неказивану аристотеловску причу навођењем појединачних примјера полиформним спектром необичних рјешавања, трагајући при том за љепотом у иновацијама, бирајући историјске садржаје са акцентом на развој математичких идеја или садржаје аритметичког или алгебарског типа који се могу геометријски интерпретирати или чисто геометријске садржаје који јасно показују илустрацију метода или имају вишеструке примјене, да би коначно апстраховањем издвојио, тј. индуковао тај значајни закључак да спектар разноврсних геометријских приказивања једног математичког проблема увијек имплицира „аха доживљаје“, тј. омогућава динамички приступ том проблему, што као коначну посљедицу има комплетно и суштинско поимање и разумијевање датог задатка.

Када је почетком треће деценије XX вијека Рудолф Арнхајм, један од оснивача гешталтистичког правца у психологији, писао своје капитално дјело [1], све своје тврдње базирао је на геометријским интерпретацијама. Цртање је први корак ка апстракцији (битна својства се сажимају, а небитна занемарују). Геометријске слике правимо да бисмо стабилизовали наше унутрашње представе. Визуелно мишљење – мишљење у сликама има особину свеобухватности и није лако преносиво. Слике, тј. иконе представљају носиоце информација. Зато, када говоримо о „доброј геометрији“, треба ставити у центар приче добар задатак приказан лијепо сликом и живим језиком.

„Живи језик“ омогућава да визуелно мишљење буде лако преносиво. Чланак И. Ф. Шаригина [7] потврдио је оно што сам имао у виду када сам писао методичке приручнике [3] и [5], као и рад [4], да широки спектар необичних геометријских прича и интерпретација илустрованих сликама „шаригиновског“ облика, обогаћује значајно наставу математике у функцији разбијања формализма у њој. У поменутих радовима приказао сам низ геометријских полиформизама и њихову примјену у наставној пракси. Јасно је да овдје не могу поновити све

примјере тих разноврсних рјешавања, већ само неке од њих. Ево елементарног примјера из поменутих радова који можемо искористити у модернизованој варијанти хеуристичке методе Георга Поје инсистирајући код ученика на самосталном проналажењу још неких доказа познате теореме.

Без много претјеривања може се казати да је идеју о строгим потпуним доказима човјечанство добило од једног човјека и једне књиге: од Еуклида и његових „Елемената“.

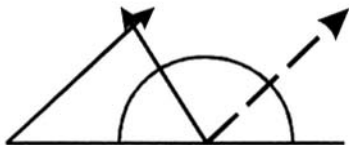


Сл. 1

Тјемом  $A$  повучена је паралела са страницом  $BC$ . Углови код  $B$  и  $C$  једнаки су одговарајућим код  $A$  (како је то приказано на слици) јер су наизмјенични углови међусобно једнаки. Збир три унутрашња угла троугла једнак је збиру три угла са заједничким тјемом  $A$  који граде опружен угао. Овим је теорема доказана. Већина наставника, вјероватно, овим завршава причу о доказивању ове познате теореме. Међутим, увијек постоје они који појашњавају „јасно“ сматрајући да је за истинско разумијевање проблема потребан динамички приступ истом. О чему се заправо овдје ради? Чувени амерички психолог Џорџ Беркли сматра: ако ову тридесет другу теорему из Еуклидових „Елемената“ демонстрира на тај начин што ће повући паралелу са једном страном тог троугла као на слици 2 или на слици 3, што ће показати да еквивалент та три угла као збир даје половину круга (опружен угао) треба истаћи да величину углова не треба узимати у обзир, чиме се доказује да теорема важи за сваки троугао. Међутим, Рудолф Арнхајм каже да овакво доказивање свакако има практичну вриједност, али за мишљење је важно да општост теореме постане очигледна, а да то није баш видљиво из уопштавања код таквог статичког приступа проблему, поготово ако то предочавамо ученицима млађег узраста (основне школе).



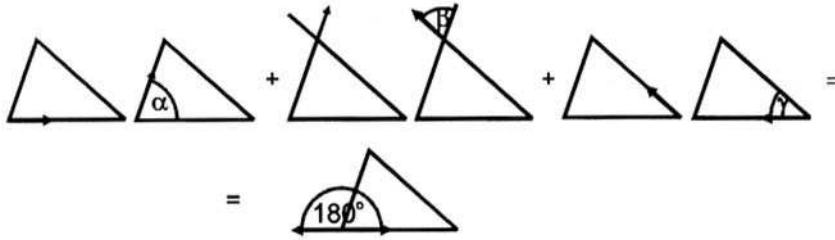
Сл. 2



Сл. 3

Зато он предлаже да се слика 2 трансформише у слику 3 тако што ће двије стране троугла замислити као кракове неограничене дужине који могу да се окрећу у тачки осовине, независно преко читаве половине круга, при чему они без обзира на положаје образују три одсјечка који као збир дају исту полукружну цјелину. Када се један угао повећава, његов сусјед се аутоматски у одговарајућој

мјери смањује. Статичан појам замјењен је динамичним. Теорема није само замисљена као општа, већ је као општу и опажамо.



Сл. 4

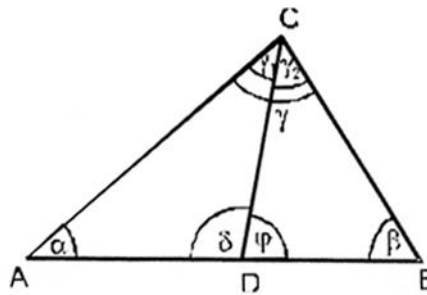
Ево још једног динамичног приступа доказу ове чувене теореме коју можемо демонстрирати ученицима основне школе. За ову интерпретацију довољно је имати једну ђачку оловку и слику произвољног неједнакостраничног троугла и примјенити композицију изометријских трансформација ротација и транслација наизмјенично као на слици 4.

При овом доказивању користили смо прикривено Плејферов аксиом паралелности.

Слично претходном примјеру коришћењем још једног еквивалента аксиоме паралелности, тј. да је збир унутрашњих углова у било којем троуглу константно једнак, ову теорему можемо доказати и на сљедећи начин: нека је  $\alpha + \beta + \gamma = S$  збир унутрашњих углова у произвољном троуглу  $ABC$ . Ако на страници  $AB$  изаберемо произвољно тачку  $D$  различиту од  $A$  и  $B$ , као на слици 5, лако је уочити

$$\begin{aligned} 2S &= \alpha + \delta + \gamma_1 + \gamma_2 + \varphi + \beta \\ &= \alpha + \beta + \gamma + 180^\circ = S + 180^\circ, \end{aligned}$$

јер је  $\delta + \varphi = 180^\circ$ , а  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ , па је очигледно  $S = 180^\circ$ , што је требало доказати.

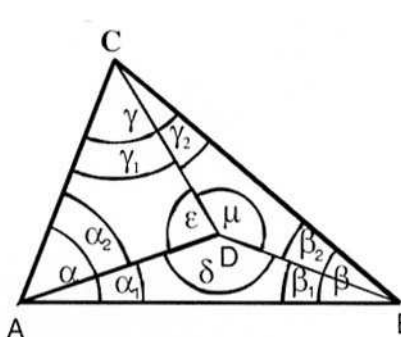


Сл. 5

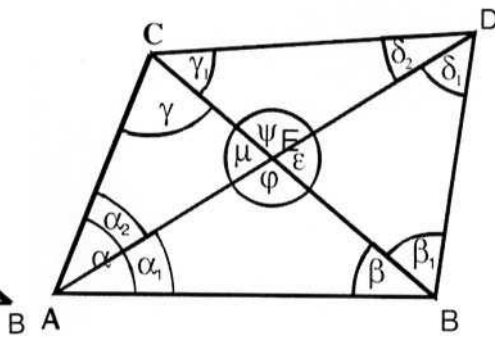
На једном од часова увјежбавања градива у I разреду гимназије у једној модернијој варијанти хеуристичке методе Георга Поје од ученика сам захтијевао, да бирајући произвољно тачку  $D$  у равни цртежа, покушају пронаћи још неки начин доказивања ове теореме. Као резултат таквог самосталног рјешавања датог проблема проистекао је сљедећи алгоритам доказивања тог чувеног Еуклидовога става.

Ако претпоставимо да је збир свих унутрашњих углова у сваком троуглу константно једнак, што је еквивалент аксиома паралелности, посматрајући слику 6 лако је уочити да је  $S = \alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2$ , као и

$3S = \alpha_1 + \beta_1 + \delta + \beta_2 + \gamma_2 + \mu + \gamma_1 + \alpha_2 + \varepsilon$ , тј.  $3S = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta + \mu + \varepsilon$ , односно,  $3S = S + 360^\circ$ , па је  $S = 180^\circ$ , што је и требало доказати.



Сл. 6



Сл. 7

Ово доказивање има још двије варијанте избора тачке  $D$ . У првом случају, када тачка  $D$  припада некој од правих којима припадају странице троугла споља, тј. тако да распоред тачака буде нпр.  $A-B-D$ . Овај доказ је сличан ономе са слике 5.

А сада погледајмо положај када тачка  $D$  не припада правим којима припадају странице  $\triangle ABC$ , нити његовој унутрашњости као на слици 7. Тада посматрајући троуглове:  $\triangle ABE$ ,  $\triangle BDE$ ,  $\triangle DCE$ ,  $\triangle CAE$ ,  $\triangle ABC$  и  $\triangle BDC$ , лако је видјети да је

$$4S = \alpha_1 + \beta + \varphi + \beta_1 + \delta_1 + \varepsilon + \delta_2 + \gamma_1 + \psi + \gamma + \alpha_2 + \mu,$$

па је  $4S = 2S + 360^\circ$ , тј.  $S = 180^\circ$ .

Један од најљепших примјера полиформних геометријских интерпретација је спектар разноврсних доказа Питагорине теореме. Овдје ћу навести десетак од тих педесетак доказа које сам навео у [3] и [5], стављајући посебно акценат на динамичност алгоритама извођења ове теореме који у себи обједињавају и неколико историји математике веома познатих извођења. Тако интегрални приступ доказивања до сада нијесам сретао у мени доступној математичко-методичкој литератури.

1) **Хокинсов (Hawkins) доказ.** Дати правоугли троугао  $BAC$ , чије су катете  $BC = a$  и  $AC = b$ , а хипотенуза  $BA = c$ , ротира се у равни троугла око тјемења  $C$  за угао од  $-90^\circ$ , тако да дође у положај  $\triangle B_1A_1C$ . Права  $(B_1A_1)$  у пресеку са правом  $(BA)$  одређује тачку  $D$  и  $B_1D$  представља висину троугла  $BA_1B_1$ . Површина четвороугла  $BA_1AB_1$ , осјенченог на слици 8, може се изразити на два начина: а) Тражена површина  $P$  се састоји из површине троугла  $BCB_1$ , тј.  $a^2/2$ , и површине троугла  $A_1CA$ , тј.  $b^2/2$ , дакле,

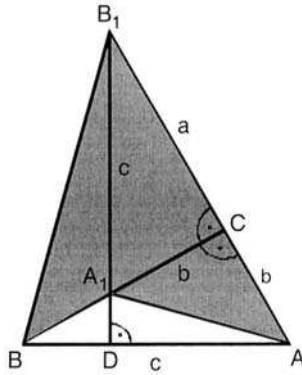
$$(a) \quad P = P_{BA_1AB_1} = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

б) Троуглови  $BA_1B_1$  и  $B_1A_1A$  имају заједничку основицу  $B_1A_1 = c$ , а њихове висине су  $BD$  и  $AD$ . Површина четвороугла  $BA_1AB_1$  може се изразити и на

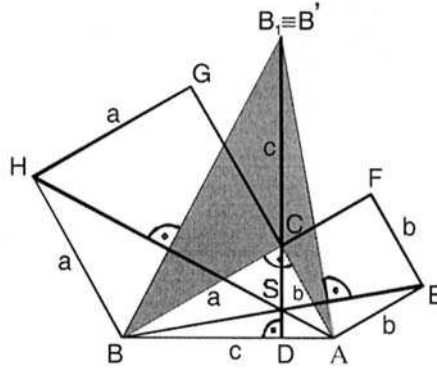
следећи начин:

$$P = \frac{c \cdot BD}{2} + \frac{c \cdot AD}{2} = \frac{c}{2}(BD + AD) = \frac{c}{2} \cdot c = \frac{c^2}{2},$$

а одакле је: (б)  $P = \frac{c^2}{2}$ . Из (а) и (б) добијамо коначно да је:  $a^2 + b^2 = c^2$ .



Сл. 8



Сл. 9

**2) Ренов (Ren) доказ.** Овај поступак је у извјесном смислу сличан Хокинсовом, па и Еуклидовом и Башарином алгоритму.

Конструишимо над странама  $BC$  и  $AC$  квадрате  $BCGH$  и  $AEFC$ , а затим повуцимо дужи  $HA$  и  $BE$  и спустимо из  $B$  и  $A$  редом нормале на  $HA$  и  $BE$ , при чему је  $(HA) \cap (BE) = \{S\}$  и  $S \in (CD)$ , гдје је  $(CD)$  права којој припада висина троугла  $ABC$  на страницу  $AB$ . Заиста, ако је тачка  $B_1$  она тачка у којој нормала  $BB_1$  сијече праву  $(CD)$ , лако је уочити подударност троуглова  $\triangle HBA \cong \triangle BCB_1$ , јер имају једнаке углове (углови са нормалним крацима) и  $HB = BC$ , па је  $BA = CB_1$ . На аналогни начин, ако је тачка  $B'$  она у којој нормала  $AB'$  сијече праву  $(CD)$ , лако се показује подударност  $\triangle EAB \cong \triangle ACB'$ , а одатле слиједи  $CB' = AB$ , па како је и  $BA = CB_1$  то се  $B_1$  и  $B'$  поклапају. Ако имамо у виду претходну чињеницу, лако је уочити једнакост површина следећих троуглова:  $P_{BCB_1} = P_{HBA} = \frac{a^2}{2}$  и  $P_{ACB_1} = P_{EAB} = \frac{b^2}{2}$ , па је:

а)  $P_{BCB_1} + P_{ACB_1} = \frac{a^2 + b^2}{2}$ , а са друге стране је:

б)  $P_{BCB_1} + P_{ACB_1} = \frac{CB}{2}(BD + DA) = \frac{BA \cdot BA}{2} = \frac{c^2}{2}$ ,

па из а) и б) слиједи  $c^2 = a^2 + b^2$ , што је и требало доказати (слика 9).

Размишљајући о томе како да поједноставим претходне доказе дошао сам до једног динамичког приступа сагледавања и обједињавања ова два алгоритма у један. Прије него објасним суштину тог уопштавања, ево једног унапређења, тј. иновирања Ренове теореме које ми је омогућило да дођем до низа нових доказа који обухватају претходна два, и још неке специјалне случајеве.

**3) Модерна варијанта Реновог доказа.** Код овога доказивања користићу познату теорему о једнакости површина разложиво једнаких полигона. Дакле, посматрајући слику 10, можемо уочити да се површина осјенченог четвороугла може израчунати на два начина:

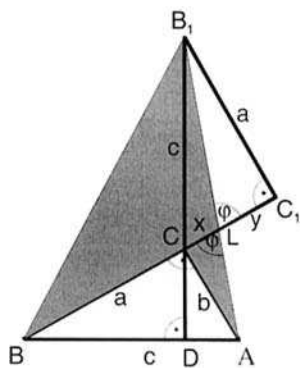
(1)

$$P_{BCAB_1} = P_{BCB_1} + P_{CAB_1} = \frac{CB_1 \cdot BD}{2} + \frac{CB_1 \cdot DA}{2} = \frac{CB_1(BD + DA)}{2} = \frac{c^2}{2},$$

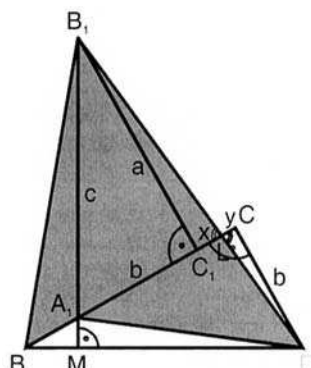
(2)

$$\begin{aligned} P_{BCAB_1} &= P_{BLB_1} + P_{CAL} = \frac{BL \cdot B_1C_1}{2} + \frac{CA \cdot CL}{2} \\ &= \frac{(a+x)a}{2} + \frac{b(b-y)}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{ax}{2} - \frac{by}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \end{aligned}$$

јер из сличности троуглова  $\triangle CAL \sim \triangle C_1B_1L$  слиједи  $CL : CA = C_1L : C_1B_1$ , односно  $x : b = y : a$ , тј.  $a \cdot x = b \cdot y$ . Из (1) и (2) слиједи  $c^2 = a^2 + b^2$ , чиме је доказ завршен.



Сл. 10



Сл. 11

Ако мало студиозније проанализирамо Хокинсов и иновирани Ренов доказ, можемо доћи до сљедећег уопштења тих доказа, а рекао бих у неком смислу и до динамизирања Еуклидовог и Башариног доказа.

**4) Доказ.** Ротирајмо троугао  $BCA$  око тачке  $C$  за угао од  $-90^\circ$  и транслирајмо га дуж праве  $(BC)$ , али тако да нормална пројекција тјемена  $B_1$  на праву  $(BA)$  – тачка  $M$  припада дужи  $BA$ . Троугао  $BCA$  се пресликао у троугао  $B_1C_1A_1$ , при чему је  $\angle ACN = \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$ , види слику 11. Површину осјенченог четвороугла можемо израчунати на два начина:

$$\begin{aligned} (1') \quad P_{BA_1AB_1} &= P_{BA_1B_1} + P_{A_1AB_1} = \frac{A_1B_1 \cdot BM}{2} + \frac{A_1B_1 \cdot MA}{2} \\ &= \frac{A_1B_1(BM + MA)}{2} = \frac{A_1B_1 \cdot BA}{2} = \frac{c \cdot c}{2} = \frac{c^2}{2}, \end{aligned}$$

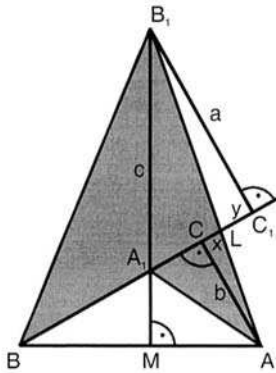
$$(2') \quad P_{BA_1AB_1} = P_{BLB_1} + P_{A_1LA} = \frac{BL \cdot B_1C_1}{2} + \frac{A_1L \cdot AC}{2} \\ = \frac{(a-y)a + (b+x)b}{2} = \frac{a^2 - ya + b^2 + xb}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Овдје треба напоменути да је  $y \cdot a = x \cdot b$ , што следи из сличности правоуглих троуглова  $\triangle CLA \sim \triangle C_1LB_1$ , јер су им и углови  $\angle CLA$  и  $\angle C_1LB_1$  једнаки као унакрсни. Коначно, из (1') и (2') слиједи  $c^2 = a^2 + b^2$ , чиме је доказ завршен.

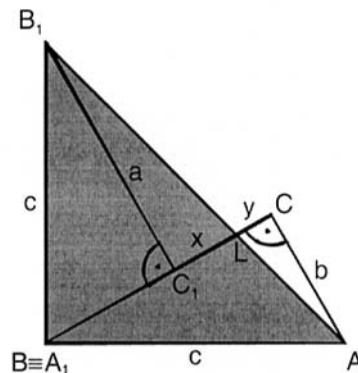
Погледајмо још једну варијанту овог доказа у случају распореда тачака  $A_1-L-C_1$  на правој  $(BC)$ , као на слици 12. Аналогно претходном поступку, површину осјенченог четвороугла ћемо израчунати на два начина:  $P_{BA_1AB_1} = \frac{c^2}{2}$  (1\*) и

$$(2^*) \quad P_{BA_1AB_1} = P_{BLB_1} + P_{A_1AL} = \frac{(a+x)a}{2} + \frac{(b-y)b}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

па из (1\*) и (2\*) слиједи тврђење, уз напомену да је  $xa = yb$  посљедица сличности правоуглих троуглова  $\triangle C_1LB_1 \sim \triangle CLA$ .



Сл. 12



Сл. 13

Јасно је да се Хокинсов доказ добија у случају када је  $C \equiv C_1$ , тј. ако су тјемена  $B_1, C \equiv C_1$  и  $A$  колинеарна, док се модернизовани Ренов доказ појављује у специјалном случају када је  $C \equiv A_1$ , тј. ако се нормална пројекција тјемена  $B_1$  на дуж  $BA$  поклапа са нормалном пројекцијом тјемена  $C$  на дуж  $BA$ , тј. тачком  $D \equiv M$ , види слику 8 и слике 11 и 12.

Погледајмо још два специјална случаја који попут претходних проистичу из четвртог доказа, а које као ни тај општи 4. поступак нијесам сретао у мени доступној математичкој литератури.

**5) Доказ.** Посматрајмо специјални случај када се нормална пројекција тјемена  $B_1$  на праву  $(BA)$  поклапа са тачком, као на слици 13. Примјеном поступка, као код доказа 8) добијамо да је површина троугла  $BAB_1$  једнака с једне стране

$c^2/2$ , а опет та иста површина може се изразити и као

$$\begin{aligned} P_{BAB_1} &= P_{BLB_1} + P_{BLA} = \frac{BL \cdot B_1C_1}{2} + \frac{BL \cdot AC}{2} = \frac{(a-y)a}{2} + \frac{(b+x)b}{2} \\ &= \frac{a^2 - ya + b^2 + xb}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \end{aligned}$$

јер као и у претходном примјеру имамо да је  $x \cdot a = y \cdot b$ , па је  $a^2 + b^2 = c^2$ , што је и требало доказати.

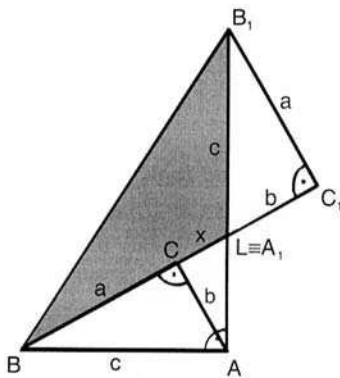
**6) Доказ.** Овај специјални случај настаје када се нормална пројекција тјемена  $B_1$  на праву  $(BA)$  поклапа са тјемомом  $A$  троугла  $BAC$ , види слику 14. Површина троугла  $BA_1B_1$  се такође може израчунати на два начина:

$$P_{BA_1B_1} = \frac{BA_1 \cdot B_1C_1}{2} = \frac{(a+x)a}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{xa}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

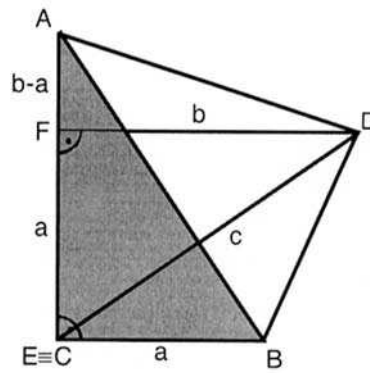
јер је  $b^2 = x \cdot a$ , што се може показати бар на два начина:  $b$  је геометријска средина одсјечака  $a$  и  $x$  у троуглу  $BAA_1$  или као посљедица сличности троуглова  $\triangle CAA_1 \sim \triangle C_1B_1A_1$ . На други начин приказана површина троугла  $BA_1B_1$  је

$$P_{BA_1B_1} = \frac{A_1B_1 \cdot AB}{2} = \frac{c^2}{2},$$

па слиједи тврђење.



Сл. 14



Сл. 15

Погледајмо сада доказ који је у извјесном смислу сличан Реновом доказивању, што ми је омогућило да га по аналогији са четвртим доказом уопштим и укажем на пет специјалних случајева који проистичу из тог уопштавања.

**7) Кавамурин доказ.** Студент Џон Кавамура је послао следећи доказ професору Крису Дејвису са Окланда, који га је објавио у часопису Mathematics Teacher 1975. године.

Четвороугао  $ACBD$  има нормалне дијагонале  $AB$  и  $CD$ , тј.  $AB \perp CD$  (види слику 15) па је

$$\frac{c^2}{2} = P_{ACBD} = P_{CBD} + P_{ACD} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

тј.  $c^2 + a^2 + b^2$ , што је и требало доказати.



Ако бисмо покушали да динамички сагледамо претходни алгоритам, дошли бисмо до његовог свеобухватнијег поимања које би резултирало општијим извођењем доказа теореме, односно доказима 8а, 8б, 8в и 8г чије су непосредне последице пет специјалних случајева, тј. докази 7, 9, 10, 11 и 12.

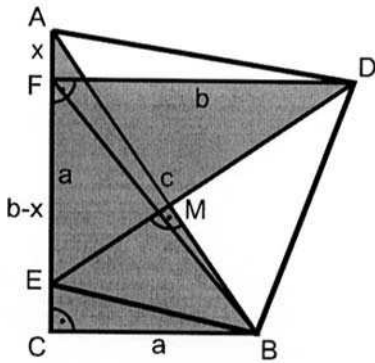
**8а) Доказ.** Ако ротирамо правоугли троугао  $ACB$  око тјмена  $C$  за угао  $-90^\circ$ , а затим га транслирамо дуж правца  $(AC)$ , он се пресликава у њему подударни правоугли троугао  $DFE$  и нека је распоред тачака на правој  $(AC)$   $A-F-E-C$  као на слици 16. Четвороугао  $EBDA$  има нормалне дијагоналае, па је лако израчунати његову површину:

$$\begin{aligned} P_{EBDA} &= P_{ABE} + P_{ABD} = \frac{AB \cdot EM}{2} + \frac{AB \cdot MD}{2} = \frac{AB(EM + MD)}{2} \\ &= \frac{AB \cdot ED}{2} = \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

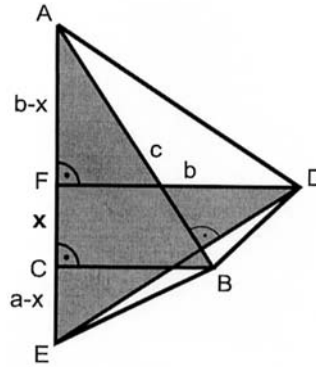
Лако је уочити да се та иста површина може израчунати и на други начин као

$$\begin{aligned} P_{EBDA} &= P_{FEB} + P_{FDB} + P_{AFD} = \frac{FE \cdot CB}{2} + \frac{FD \cdot FC}{2} + \frac{FD \cdot AF}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{b(b-x)}{2} + \frac{b \cdot x}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \end{aligned}$$

одакле слиједи да је  $c^2 = a^2 + b^2$ , што је и требало доказати.



Сл. 16



Сл. 17

**8б) Доказ.** У случају када је распоред тачака  $F-C-E$  на правој  $(AC)$  као на слици 17, лако је уочити да се површина четвороугла  $AEBD$  може израчунати на два начина, најпре  $P_{AEBD} = \frac{AB \cdot ED}{2} = \frac{c^2}{2}$ , јер су дужине његових нормалних дијагоналаа једнаке,  $AB = ED = c$ . С друге стране, та иста површина може се разложити на збир површина два правоугла троугла  $AFD$  и  $EBC$  и једног правоуглог трапеза  $FCBD$ , тј.

$$\begin{aligned} P_{AEBD} &= P_{AFD} + P_{ECB} + P_{FCBD} = \frac{(b-x)b}{2} + \frac{(a-x)a}{2} + \frac{(a+b)x}{2} \\ &= \frac{b^2 - xb + a^2 - xa + ax + bx}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}, \end{aligned}$$

па коначно имамо да је  $c^2 = a^2 + b^2$ , чиме је доказ завршен.

Троугао  $FED$  можемо транслирати дуж праве  $(AC)$  у оба њена смјера, тако да су могуће још двије карактеристичне опште позиције овог интегралног, динамичког доказивања, као на сликама 18 и 19.

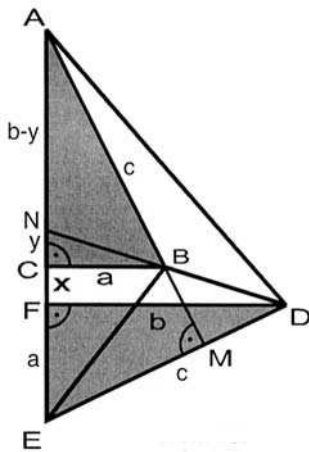
**8в) Доказ.** Ако је распоред тачака на правој  $(AC)$  такав да је  $A-C-F-E$  и при чему је  $FD = b > a = CB$  и тјеме  $D$  не припада области угла  $BAC$ , тада имамо случај као на слици 18.

Површину четвороугла  $AEBD$  можемо израчунати на сљедећа два начина. Због нормалности правих  $(AB) \perp (ED)$  лако је уочити да је

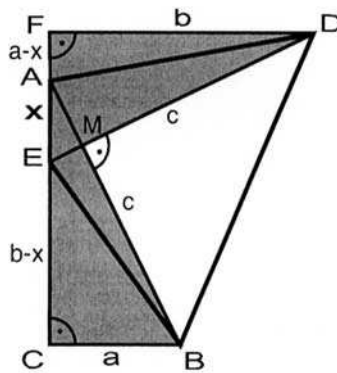
$$(1) \quad P_{AEBD} = P_{AEB} + P_{ABD} = \frac{AB \cdot EM + AB \cdot MD}{2} \\ = \frac{AB(EM + MD)}{2} = \frac{AB \cdot ED}{2} = \frac{c^2}{2},$$

$$(2) \quad P_{AEBD} = P_{AND} + P_{NEB} = \frac{AN \cdot FD}{2} + \frac{NE \cdot CB}{2} \\ = \frac{(b-y)b}{2} + \frac{(a+x+y)a}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2},$$

јер је  $yb = (x+y)a$  последица сличности правоуглих троуглова  $\triangle NCB \sim \triangle NFD$ , који имају и заједнички угао код тјеме  $N$ . Из (1) и (2) слиједи тврђење.



Сл. 18



Сл. 19

**8г) Доказ.** Анализирајмо случај када је распоред тачака на правој  $(AC)$ :  $F-A-E-C$ . Тада површину четвороугла  $AEBD$  чије су дијагонале нормалне,

можемо такође изразити на два начина:

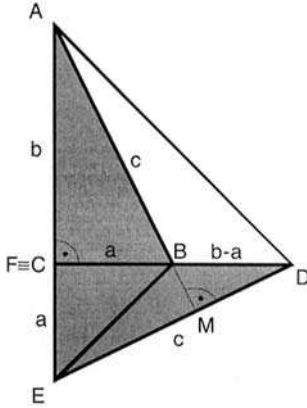
(1)

$$\begin{aligned} P_{AEBD} &= P_{EDA} + P_{EDB} = \frac{ED \cdot AM}{2} + \frac{ED \cdot MB}{2} \\ &= \frac{ED(AM + MB)}{2} = \frac{ED \cdot AB}{2} = \frac{c^2}{2}, \end{aligned}$$

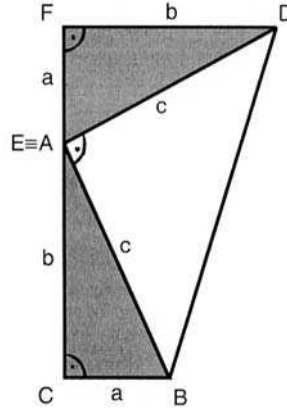
(2)

$$\begin{aligned} P_{AEBD} &= P_{FCBD} + P_{FAD} + P_{ECB} = \frac{(a+b)(a+b-x)}{2} - \frac{(a-x)b}{2} - \frac{(b-x)a}{2} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - ax - bx - ab + xb - ba + xa}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

Сада погледајмо све остале специјалне случајеве који проистичу из групе динамичких доказа 8а, 8б, 8в и 8г. Лако је уочити да Кавамурин доказ 7 добијамо у случају ако се поклапају тјемена троуглова  $ABC$  и  $DFE$ .



Сл. 20



Сл. 21

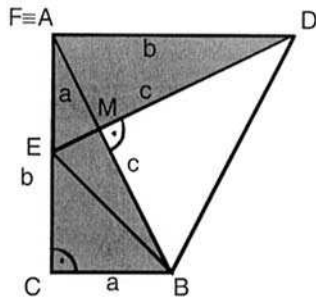
**9) Доказ.** У случају када је  $C \equiv F$ , а распоред тачака на правој ( $AC$ ) је  $A-C-E$  као на слици 20, појављује се Хокинсов специјални случај овог динамичког извођења. Површина четвороугла  $AEBD$  лако се израчунава на два начина:  $P_{AEBD} = P_{ACD} + P_{ECB} = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}$ , као и  $P_{AEBD} = P_{ABE} + P_{ABD} = \frac{AB \cdot EM + AB \cdot MD}{2} = \frac{AB(EM + MD)}{2} = \frac{AB \cdot ED}{2} = \frac{c^2}{2}$ , па је  $c^2 = a^2 + b^2$ , што је и требало доказати.

**10) Доказ.** У случају када је  $A \equiv E$ , а распоред тачака на правој ( $AC$ ) је  $F-A-C$  као на слици 21, добијамо Гарфилдов (Garfield) доказ Питагорине теореме. Површина троугла  $ABD$  се може израчунати на два начина:  $P_{ABD} = \frac{c^2}{2}$ , као и

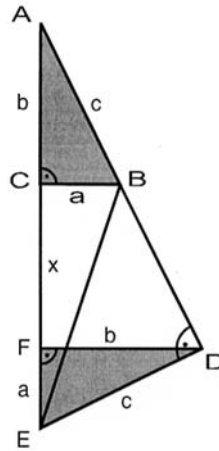
$$P_{ABD} = P_{FCBD} - P_{FAD} - P_{ACB} = \frac{(a+b)(a+b)}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

одакле слиједи тврђење.

**11) Доказ.** У случају када је  $A \equiv F$ , а распоред тачака на правој  $(AC)$  је  $A-E-C$  као на слици 22, имамо још један специјални доказ који нијесам сретао у мени доступној математичкој литератури. Површину четвороугла  $AEBD$  можемо израчунати на два начина:  $P_{AEBD} = P_{AEB} + P_{ABD} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$  и  $P_{AEBD} = P_{AED} + P_{EBD} = \frac{ED \cdot AM}{2} + \frac{ED \cdot MB}{2} = \frac{ED(AM + MB)}{2} = \frac{ED \cdot AB}{2} = \frac{c^2}{2}$ , па је  $a^2 + b^2 = c^2$ .



Сл. 22



Сл. 23

**12) Доказ.** У случају када је распоред тачака на правој  $(AC)$   $A-C-F-E$ , тачка  $D$  колинеарна са тачкама  $A$  и  $B$ , као на слици 23, тада имамо још један специјални случај доказа Питагорине теореме који нијесам сретао у мени доступној математичкој литератури. Лако је уочити да је троугао  $ADE$  правоугли, јер је  $\angle ADE = \angle ADF + \angle FDE = \beta + \alpha = 90^\circ$ , одакле слиједи да је  $b^2 = FD^2 = AF \cdot FE = (b+x)a$ , јер је висина  $FD$  геометријска средина одсјечака  $AF$  и  $FE$  на хипотенузи  $AE$  правоуглог троугла  $AED$ . Површину троугла  $AEB$  можемо израчунати на два начина: а)  $P_{AEB} = \frac{AB \cdot DE}{2} = \frac{c^2}{2}$  и б)  $P_{AEB} = \frac{AE \cdot CB}{2} = \frac{(a+x+b)a}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ . Из а) и б) слиједи тврђење.

У конкретном случају полиформно доказивање Питагорине теореме омогућило ми је да једним интегралним сагледавањем објединим читав низ познатих доказа. Они су се појавили као специјални случајеви тог апстраховања, тј. као непосредне посљедице наведених динамичких доказа 4, 8а, 8б, 8в и 8г. Поред њих, као непосредна импликација таквог сагледавања доказивања Питагорине теореме проистекли су и специјални случајеви 11 и 12, које нијесам сретао у математичко-методичкој литератури, па их сматрам новим. Иако је Лумис (Loomis) далеке 1940. године објавио преко 370 разноврсних доказа Питагорине теореме, невјероватно звучи податак да се у основношколским и средњошколским уџбеницима појављују само два до три доказа ове чувене теореме.

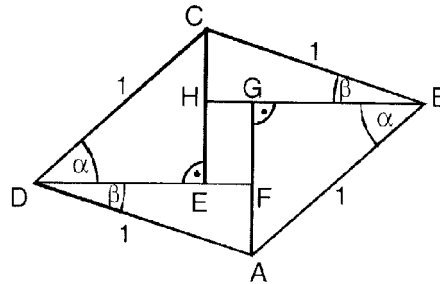
Поред наведених доказивања постоји и непрегледно „море“ и других примјера геометријских полиформизама од којих је на мене најупечатљивији утисак оставило полиформно доказивање адicione теорема.

Још као професор-почетник примјетио сам да код обраде тригонометрије, ученици имају потешкоћа код разумијевања доказивања адicione теорема. У уџбеницима за гимназије и друге средње школе ти докази су уобичајени и до данас се раде истом методологијом. Посматрајући ту проблематику сада, након тридесетогодишњег искуства у непосредној настави математике, не могу да се одупрем утиску чуђења израженог питањем: зар је могуће да поред богатства, цијелог спектра различитих елегантних, једноставних и лијепих доказа ових теорема, ниједан од њих није пронашао своје „мјесто под сунцем“ неког модерног уџбеника математике. Ако је то тако, а тако је, када су у питању уџбеници математике за средње школе и гимназије, онда не треба да нас чуди чињеница да је мали број наставника у непосредној настави спреман да нешто радикалније мијења, а камоли иновира. Међутим, када су ученици у питању, они су спремни и радо прихватају промјене у настави, посебно разноврсност при објашњавању (доказивању), тј. иновирани, једноставније и љепше приказане математичке садржаје.

Конкретно, када је у питању настава тригонометрије, она се у гимназијама математичког смјера реализује у оквиру теме Тригонометријске функције (54 часа) у другом разреду. Умјесто уобичајеног доказа из уџбеника ученицима сам примјеном Птолемејеве теореме извео теорему: Ако су  $\alpha$  и  $\beta$  такви углови да је  $0 < \alpha + \beta < \pi$ , тада је  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ . На једном од часова обрадили смо класични начин доказивања, а након њега сам показао иновацију коришћењем полазне идеје о јединичном ромбу. Ученицима се допала једноставност овога доказа који непосредно проистиче примјеном разложиве једнакости површине ромба са два пара подударних троуглова и једним правоугаоником (слика 24). Тако да су сами у своје свеске одмах написали  $\sin(\alpha + \beta) = P$  и

$$\begin{aligned} P &= \cos \beta \sin \beta + \cos \alpha \sin \alpha + (\sin \alpha - \sin \beta)(\cos \beta - \cos \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \end{aligned}$$

одакле слиједи полазно тврђење. Ученици су кроз увјежбавање у почетку полумостално, а потом самостално једноставним трансформацијама изводили остале адicione формуле. Показавши им како се на другачији начин од онога на који су је они извели може доказати теорема о трансформацији збира косинуса у производ захтијевао сам да погодним трансформацијама, коришћењем доказане теореме изведу све адicione теореме.



Сл. 24

Презентована на овај начин прича о адicione теоремама се пролонгирала за један до два часа. Међутим, иако се број ових часова повећао на уштрб часова увјежбавања, ефекти такве наставе огледали су се како у бољем разумјевању

и усвајању пређених садржаја, тако и у знатном повећању интересовања и активности ученика на часовима математике, са посебном тежњом ка самосталном, креативном раду. Полиформне геометријске интерпретације извођења адиционих формула својом интегралношћу и „бљеском“ комплетне јасноће као непосредну последицу имале су стварање трајних знања код ученика, што сам уочио провјером њихових знања на часовима годишње систематизације градива неколико мјесеци касније. Оно што ме је посебно изненадило у позитивном смислу је не само то што су сви ученици знали бар један доказ ових теорема, него и то што је већина њих знала и тај реверзибилни поступак доказивања ових теорема о којим је било ријечи. По мени, била је то још једна у низу практичних потврда да је полиформност геометријских интерпретација зачињених иновационим елементима својим динамичким приступом, тј. комплетним сагледавањем и разумијевањем датих проблема ученицима омогућила да јасније проникну у суштину проблема одвикавајући их од шаблонског рјешавања задатака и самим тим значајно допринијела стварању трајних знања.

До већине полиформних геометријских тумачења објављених у методичком приручнику [12], од којих је незнатан дио претходни текст, дошао сам током вишегодишњег рада у настави средњих стручних школа и гимназије, примјењујући и стално провјеравајући ефекте њиховог дејства на повећање интензитета динамизма процеса учења математике. Након тих експерименталних провјера у свим случајевима постало ми је јасно да ефекти такве методологије индукују динамички приступ свеобухватног сагледавања проблема што импликује рађање трајних знања.

Дакле, на основу сопственог искуства и експерименталних провјера у средној настави уочио сам да модернизована хеуристичка метода Георга Поје у свијетлу полиформних геометријских тумачења даје изванредне резултате у процесу усвајања математичких садржаја, посебно онда ако су јој додати иновациони елементи.

## Литература

- [1] Р. Арнхајм, *Визуелно мишљење (јединство слике и појма)*, Београд, 1985.
- [2] Еуклид, *Елементи* (превод А. Билимовића), Београд 1949.
- [3] Б. Г. Марковић, *Геометријска читанка*, Светигора, Никшић, 2003.
- [4] Б. Г. Марковић, *Геометрија у функцији разбијања формализма у настави математике*, Нови Сад, 2005.
- [5] Б. Г. Марковић, *Геометријски полиформизам*, Макарије, Подгорица, 2006.
- [6] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
- [7] И. Ф. Шарыгин, *Да ли је геометрија потребна школи 21. вијека* (на руском), Математическое просвещение (3-ња серия), МЦНИО, Москва 2004.