НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2006, LI, 3–4, стр. 1–10

Др Владимир Јанковић

КЕПЛЕРОВИ ПРОБЛЕМИ

Апстракт. У овом чланку приказана су векторска решења Кеплеровог проблема и инверзног Кеплеровог проблема. Као помоћни апарат у решавању ових проблема дате су векторске једначине конусних пресека.

0. Увод

Почетком седамнаестог века Јохан Кеплер је формулисао три закона, који се односе на кретање планета око Сунца. Они су познати под називом Кеплерови закони.

I. *Свака планета се креће по елипси у чијој се једној жижи налази Сунце.*

II. *Радијус вектор планете у односу на Сунце у једнаким временским интервалима пребрише једнаке површине.*

III. *Квадрати периода обртања планета око Сунца пропорционални су кубовима великих полуоса њихових орбита.*

До ових закона Кеплер је дошао проучавајући резултате посматрања које је у другој половини шеснаестог века обавио Тихо де Брахе. Дакле, иницијално Кеплерови закони су били резултат емпирије.

Крајем седамнаестог века Исак Њутн је формулисао закон гравитације који гласи:

Два тела се привлаче силама које су директно пропорционалне њиховим масама и обрнуто пропорционалне квадрату њиховог растојања.

Овде је реч о фундаменталном закону механике који важи за сва небеска тела и на основу њега потпуно су одређена кретања небеских тела. У вези са тим појавио се Кеплеров проблем: *из Њутновог закона гравитације извести Кеплерове законе.* Први који се срео са тим проблемом био је Њутн. Он га је решио и тако је добио Кеплерове законе теоријским путем.

Кеплерови закони су настали изучавањем путања планета око Сунца и формулисани су за планете. Међутим, у ситуацији када се неко тело креће под утицајем гравитације другог тела, путања може бити и неки други конусни пресек: парабола или хипербола. И у таквим случајевима важе прва два Кеплерова закона. С обзиром да кретање по параболичној или хиперболичној путањи не може бити периодично, питање трећег Кеплеровог закона у таквом случају се ни не поставља. Знатно после Кеплера и Њутна, физичари су се срели са ситуацијом у којој је доминантна сила интеракције између два тела одбојна. Реч је о електростатичкој сили између истополних наелектрисања. Ако се наелектрисана честица креће у близини истополног наелектрисања, њена путања ће бити хипербола. И у овом случају важе прва два Кеплерова закона. Наравно, у формулацији Кеплерових закона, термине планета и Сунце треба заменити одговарајућим терминима.

Проблем који ћемо разматрати у овом чланку је следећи:

Материјална тачка се креће у пољу сила чији је правац одређен вектором положаја тачке у односу на координатни почетак, а интензитет је обрнуто пропорциналан квадрату растојања од координатног почетка. Доказати:

1. *Путања те материјалне тачке је конусни пресек коме је координатни почетак (једна од) жижа.*

2. *Радијус вектор те материјалне тачке пребрише једнаке површине у једнаким временским интервалима.*

3. *Ако се разне материјалне тачке крећу у истом пољу по елиптичким путањама, квадрати њихових периода су пропорционални кубовима великих полуоса њихових трајекторија.*

Ако се материјална тачка креће у складу са условима 1 и 2, јасно је да је тиме њено кретање у потпуности одређено. Поставља се питање може ли се Њутнов закон гравитације извести из прва два Кеплерова закона. То је инверзан Кеплеров проблем. Његова формулација гласи овако:

Тачка се креће у складу са условима 1 и 2. Доказати да је правац вектора убрзања те тачке једнак правцу њеног радијус вектора, а да је његов интензитет обрнуто пропорционалан квадрату растојања од координатног почетка.

Овде ћемо изложити решења Кеплеровог проблема и инверзног Кеплеровог проблема. Решење Кеплеровог проблема које је дато у другом параграфу нашао сам у једној књизи о векторима на руском језику, која је издата пре тридесетак година. Траг књизи се, нажалост, изгубио, па не могу да наведем њен наслов и име аутора. Само сам сачувао поменуто решење преписано на један лист папира. Решење инверзног Кеплеровог проблема, које је изложено у трећем параграфу, сам сам извео. У оба извођења примењује се искључиво векторски метод, без координата и без тригонометрије. Приликом рада са векторима срећемо се са ограничењима која не постоје у случају када радимо са бројевима. Пре свега, не можемо да делимо вектор вектором. Због тога је потребно вешто заобилазити та ограничења. У другом и трећем параграфу је показано како се то може постићи у неким случајевима.

Први параграф посвећен је векторским једначинама конусних пресека. Показано је да парабола, елипса и хипербола имају векторске једначине истог типа.

Овај параграф, који се може читати и независно, представља припрему за следећа два параграфа, који садрже основни део овог текста.

Историјат ових проблема и други начини њиховог решавања могу се наћи у књизи [1], која је изашла из штампе ове године.

1. Векторске једначине конусних пресека

Доказаћемо да се крива другог реда са жижом у координатном почетку може задати векторском једначином

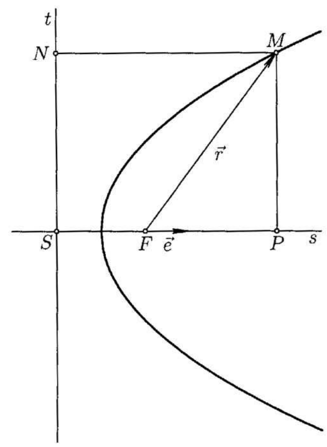
$$r = \vec{e}\,\vec{r} + d, \tag{1.1}$$

где је $\vec{e}$ вектор различит од нула вектора и где је d реалан број различит од нуле.

Парабола је скуп тачака у равни које су подједнако удаљене од дате праве и од дате тачке ван ње. Та дата права се зове директриса параболе а та дата тачка се зове жижа параболе.

Означимо директрису са t а жижу са F. Нека је M произвољна тачка у равни. Означимо са N пројекцију тачке M на праву t. Парабола је скуп тачака које задовољавају услов

$$MF = MN. \tag{1.2}$$



Нека је s права која пролази кроз тачку F и ортогонална је на праву t и нека је S тачка пресека правих s и t. Означимо са $d > 0$ растојање тачке F од праве t, тј. дужину дужи SF, а са $\vec{e}$ орт вектора $\overrightarrow{SF}$. Нека је $\vec{r}$ вектор положаја тачке M у односу на тачку F. Означимо са P пројекцију тачке M на праву s. Растојање тачке M од тачке F је $MF = r$, а растојање тачке M од праве t једнако је

$$MN = |\overrightarrow{SP}| = |\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FP}| = |\vec{e}\,(\overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FP})| = |\vec{e}\,\overrightarrow{SF} + \vec{e}\,\overrightarrow{FP}| = |d + \vec{e}\,\vec{r}|.$$

Зато је (1.2) еквивалентно са

$$r = |\vec{e}\,\vec{r} + d|. \tag{1.3}$$

Како је

$$-(\vec{e}\,\vec{r} + d) \leqslant |\vec{e}\,\vec{r}| - d \leqslant er - d = r - d < r,$$

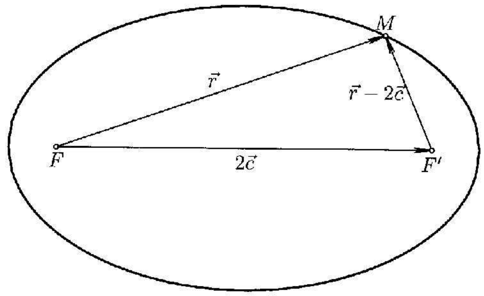
једначина (1.3) је еквивалентна са (1.1).

Очигледно је да је за $e = 1$ и $d > 0$ једначином (1.1) задата парабола чија је жижа координатни почетак и чија је директриса права која пролази кроз тачку P са вектором положаја $-d\vec{e}$ и која је ортогонална на вектор $\vec{e}$.

Елипса је скуп тачака у равни за које је збир растојања од две дате тачке константан. Те дате тачке се зову жиже елипсе.

Нека су F и F' жиже елипсе, $\vec{c} = \overrightarrow{FF'}/2$ и нека је a полузбир растојања тачака елипсе од њених жижа. Имамо да је $0 < c < a$. Бројеви a и $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ се зову велика и мала полуоса елипсе. Елипса је скуп тачака M у равни које задовољавају услов

$$MF + MF' = 2c. \tag{1.4}$$



Означимо са $\vec{r}$ вектор положаја тачке M у односу на тачку F. Растојања тачке M од тачака F и F' су $MF = r$ и $MF' = |\vec{r} - 2\vec{c}|$. Зато је (1.4) еквивалентно са

$$r + |\vec{r} - 2\vec{c}| = 2a. \tag{1.5}$$

Једначина (1.5) је еквивалентна једначини

$$|\vec{r} - 2\vec{c}| = |2a - r|. \tag{1.6}$$

Лако се види да из (1.5) следи (1.6). Из (1.6) следи (1.5) зато што је

$$|\vec{r} - 2\vec{c}| \geqslant r - 2c > r - 2a.$$

Даље, редом добијамо еквивалентне једначине:

$$\begin{gathered}
(\vec{r} - 2\vec{c})^2 = (2a - r)^2, \\
r^2 - 4\vec{c}\,\vec{r} + 4c^2 = r^2 - 4ar + 4a^2, \\
ar = \vec{c}\,\vec{r} + a^2 - c^2, \\
ar = \vec{c}\,\vec{r} + b^2.
\end{gathered}$$

Последња једначина се своди на (1.1) за $\vec{e} = \vec{c}/a$ и $d = b^2/a$. Приметимо да је $0 < e < 1$ и $d > 0$.

Ако вектор $\vec{e}$ и реалан број d задовољавају услове $0 < e < 1$ и $d > 0$, може се показати да је једначином (1.1) задата елипса чија се једна жижа налази у координатном почетку. Реални бројеви $a = d/(1 - e^2)$ и $c = de/(1 - e^2)$ задовољавају услове $c/a = e$ и $d = (a^2 - c^2)/a$. Из $0 < e < 1$ и $d > 0$ следи да је $0 < c < a$. Нека је F координатни почетак и F' тачка са вектором положаја $2a\vec{e}$. Једначином (1.1) је задата елипса која представља скуп тачака чији је збир растојања од тачака F и F' једнак $2a$.

Хипербола је скуп тачака у равни за које је разлика растојања од две дате тачке константан. Те дате тачке се зову жиже хиперболе.

Нека су F и F' жиже хиперболе, $\vec{c} = \overrightarrow{FF'}/2$ и нека је a полуразлика растојања тачака хиперболе од њених жижа. Имамо да је $0 < a < c$. Бројеви a и $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ се зову реална и имагинарна полуоса хиперболе. Хипербола је скуп тачака које M у равни задовољавају услов

$$|MF' - MF| = 2c. \tag{1.7}$$

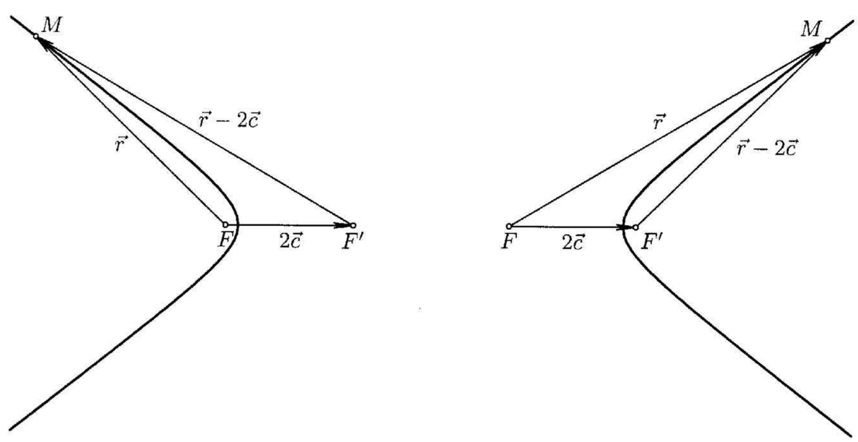
Хипербола се састоји од две гране. То су два скупа тачака задата условима

$$MF' - MF = 2c, \tag{1.8}$$

и

$$MF - MF' = 2c. \tag{1.9}$$

Гране хиперболе су симетричне у односу на осу симетрије дужи FF'. За жижу F кажемо да је унутрашња жижа гране задате условом (1.8) и спољашња жижа гране задате условом (1.9); за жижу F' кажемо да је спољашња жижа гране задате условом (1.8) и унутрашња жижа гране задате условом (1.9).



Означимо са $\vec{r}$ вектор положаја тачке M у односу на тачку F. Растојања тачке M од тачака F и F' су $MF = r$ и $MF' = |\vec{r} - 2\vec{c}|$.

Једначина (1.8) је еквивалентна са

$$|\vec{r} - 2\vec{c}| - r = 2a. \tag{1.10}$$

Једначина (1.10) је еквивалентна редом са једначинама

$$|\vec{r} - 2\vec{c}| = r + 2a,$$
$$(\vec{r} - 2\vec{c})^2 = (r + 2a)^2,$$
$$r^2 - 4\vec{c}\,\vec{r} + 4c^2 = r^2 + 4ar + 4a^2,$$
$$ar = -\vec{c}\,\vec{r} + c^2 - a^2,$$
$$ar = -\vec{c}\,\vec{r} + b^2.$$

Последња једначина се своди на (1.1) за $\vec{e} = -\vec{c}/a$ и $d = b^2/a$. Приметимо да је $e > 1$ и $d > 0$.

Ако вектор $\vec{e}$ и реалан број d задовољавају услове $e > 1$ и $d > 0$, може се показати да је једначином (1.1) задата грана хиперболе чија се унутрашња жижа налази у координатном почетку. Реални бројеви $a = d/(e^2 - 1)$ и $c = de/(e^2 - 1)$ задовољавају услове $c/a = e$ и $d = (c^2 - a^2)/a$. Из $e > 1$ и $d > 0$ следи да је $0 < c < a$. Нека је F координатни почетак и F' тачка са вектором положаја $2a\vec{e}$. Једначином (1.1) је задата грана хиперболе која представља скуп тачака чија је разлика растојања од тачака F и F' једнак $2a$.

Једначина (1.9) је еквивалентна са

$$r - |\vec{r} - 2\vec{c}| = 2a. \tag{1.11}$$

Једначина (1.11) је еквивалентна једначини

$$|\vec{r} - 2\vec{c}| = |r - 2a|. \tag{1.12}$$

Лако се види да из (1.11) следи (1.12). Из (1.12) следи (1.11) зато што је

$$|\vec{r} - 2\vec{c}| \geqslant 2c - r > 2a - r = -(r - 2a).$$

Даље, редом добијамо еквивалентне једначине:

$$\begin{gathered}(\vec{r} - 2\vec{c})^2 = (r - 2a)^2,\\ r^2 - 4\vec{c}\,\vec{r} + 4c^2 = r^2 - 4ar + 4a^2,\\ ar = \vec{c}\,\vec{r} + a^2 - c^2,\\ ar = \vec{c}\,\vec{r} - b^2.\end{gathered}$$

Последња једначина се своди на (1.1) за $\vec{e} = \vec{c}/a$ и $d = -b^2/a$. Приметимо да је $e > 1$ и $d < 0$.

Ако вектор $\vec{e}$ и реалан број d задовољавају услове $e > 1$ и $d < 0$, може се показати да је једначином (1.1) задата грана хиперболе чија се спољашња жижа налази у координатном почетку. Реални бројеви $a = -d/(e^2-1)$ и $c = -de/(e^2-1)$ задовољавају услове $c/a = e$ и $d = (a^2 - c^2)/a$. Из $e > 1$ и $d < 0$ следи да је $0 < c < a$. Нека је F координатни почетак и F' тачка са вектором положаја $2a\vec{e}$. Једначином (1.1) је задата грана хиперболе која представља скуп тачака чија је разлика растојања од тачака F и F' једнак $2a$.

На крају, можемо да резимирамо:

- ако је $e = 1$ и $d > 0$ једначином (1.1) задата је парабола чија се жижа налази у координатном почетку;
- ако је $e < 1$ и $d > 0$ једначином (1.1) задата је елипса чија се једна жижа налази у координатном почетку;
- ако је $e > 1$ и $d > 0$ једначином (1.1) задата је грана хиперболе чија се унутрашња жижа налази у координатном почетку;
- ако је $e > 1$ и $d < 0$ једначином (1.1) задата је грана хиперболе чија се спољашња жижа налази у координатном почетку.

Број e се зове ексцентрицитет конусног пресека. Ексцентрицитет елипсе је мањи од један, ексцентрицртет параболе је једнак један а ексцентрицртет хиперболе је већи од један.

Ако је $e \leqslant 1$ и $d < 0$, из

$$\vec{e}\,\vec{r} + d \leqslant er + d \leqslant r + d < r,$$

следи да једначина (1.1) нема решења.

2. Кеплеров проблем

Претпоставимо да се тачка M налази у централном пољу чији је интензитет обрнуто пропорционалан квадрату растојања тачке од центра поља, а правац одређен вектором положаја тачке у односу на центар поља. Нека је са $\vec{r}$ означен вектор положаја тачке M, са r његов интензитет, а са $\vec{o}$ његов орт ($\vec{o} = \vec{r}/r$). Тада је убрзање тачке M дато формулом

$$\vec{r}\,'' = -k\frac{\vec{o}}{r^2} = -k\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{2.1}$$

Коефицијент k је позитиван ако је поље усмерено ка центру, као што је нпр. случај са гравитационим пољем. Из (2.1) добијамо да је

$$\vec{r} \times \vec{r}\,'' = \vec{r} \times \left(-k\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{k}{r^3}(\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}.$$

Како је

$$(\vec{r} \times \vec{r}\,')' = \vec{r}\,' \times \vec{r}\,' + \vec{r} \times \vec{r}\,'' = \vec{r} \times \vec{r}\,'' = \vec{0},$$

то је вектор $\vec{r} \times \vec{r}\,'$ константан. Уведимо ознаку

$$\vec{s} = \vec{r} \times \vec{r}\,'. \tag{2.2}$$

Из формуле (2.2) добијамо да је крива по којој се креће тачка M равна. Раван у којој лежи та крива пролази кроз центар поља и ортогонална је на вектор $\vec{s}$. Површина области коју радијус вектор $\vec{r}$ пребрише у временском интервалу $[a, b]$ једнака је апсолутној вредности интеграла

$$\frac{1}{2}\int_a^b (\vec{r} \times \vec{r}\,')\,dt. \tag{2.3}$$

Због тога формула (2.2) представља аналитички запис другог Кеплеровог закона.

Имамо да је

$$\vec{s} = \vec{r} \times \vec{r}\,' = r\vec{o} \times (r'\vec{o} + r\vec{o}\,') = r^2(\vec{o} \times \vec{o}\,').$$

Следи да је

$$\begin{aligned}\vec{r}\,'' \times \vec{s} &= \left(-k\frac{\vec{o}}{r^2}\right) \times (r^2(\vec{o} \times \vec{o}\,')) = -k\vec{o} \times (\vec{o} \times \vec{o}\,') \\ &= -k((\vec{o}\,\vec{o}\,')\vec{o} - (\vec{o}\,\vec{o})\vec{o}\,') = k\vec{o}\,'.\end{aligned}$$

Овде смо користили чињеницу да је извод јединичног вектора ортогоналан том вектору (из $\vec{o}\,\vec{o} = 1$ следи да је $2\vec{o}\,\vec{o}\,' = (\vec{o}\,\vec{o})' = 0$). Дакле, имамо да је

$$(\vec{r}\,' \times \vec{s})\,' = (k\vec{o})\,'.$$

Одатле следи да постоји константан вектор $\vec{q}$, за који је

$$\vec{r}\,' \times \vec{s} = k\vec{o} - \vec{q}. \tag{2.4}$$

С обзиром да је

$$(\vec{r}\,' \times \vec{s})\vec{r} = \vec{s}(\vec{r} \times \vec{r}\,') = \vec{s}\,\vec{s} = s^2,$$

имамо да је

$$(k\vec{o} - \vec{q})\vec{r} = s^2,$$

тј.

$$kr - \vec{q}\,\vec{r} = s^2.$$

Следи да је

$$r = \vec{e}\,\vec{r} + d,$$

где је $\vec{e} = \vec{q}/k$ и $d = s^2/k$. Дакле, крива по којој се креће тачка M је конусни пресек (први Кеплеров закон).

Ако је $k < 0$, тј. ако је поље одбојно, крива по којој се креће тачка M мора бити грана хиперболе којој је центар поља спољашња жижа. Такву ситуацију имамо у случају када се наелектрисана честица креће у централном електростатичком пољу истополног наелектрисања. Ако је $k > 0$, тј. ако је поље привлачно, крива по којој се креће тачка M може бити:

1. елипса којој је центар поља једна жижа,
2. парабола којој је центар поља жижа,
3. грана хиперболе којој је центар поља унутрашња жижа.

Која је од ових кривих у питању зависи од тога да ли је $e < 1$, $e = 1$ или $e > 1$. Ексцентрицитет e се рачуна тако што се из формула (2.2) и (2.4) добију вектори $\vec{s}$ и $\vec{q}$ уврштавањем почетног вектора положаја тачке М и њене почетне брзине уместо $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$, а потом се примени формула $e = q/k$.

Претпоставимо да је поље привлачно ($k > 0$) и да се тачка M креће по елипси. То кретање је периодично. Означимо са T његову периоду. Површина области ограничене елипсом једнака је πab. На основу (2.3) и (2.2) та површина је једнака $sT/2$. Дакле, имамо да је

$$T = \frac{2\pi ab}{s}. \tag{2.5}$$

Из $d = b^2/a$ и $d = s^2/k$ добијамо да је

$$b^2 = \frac{as^2}{k}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) следи да је

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{s^2},$$

одакле на основу (2.6) добијамо

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k}. \tag{2.7}$$

Из последње формуле следи трећи Кеплеров закон.

3. Инверзан Кеплеров проблем

Нека је M тачка која се креће у складу са првим и другим Кеплеровим законом:

1. *Путања тачке M је конусни пресек коме је координатни почетак (једна) жижа.*

2. *Радијус вектор тачке M у једнаким временским интервалима пребрише једнаке површине.*

Услови да је путања тачке M крива која лежи у равни која пролази кроз координатни почетак и да њен вектор положаја $\vec{r}$ у једнаким временским интервалима пребрише једнаке површине могу аналитички да се запишу са

$$\vec{r} \times \vec{r}\,' = \vec{s}, \tag{3.1}$$

где је $\vec{s}$ константан вектор, ортогоналан на раван у којој се налази разматрана путања. Услов да је равна крива конусни пресек коме је координатни почетак (једна) жижа аналитички се изражава векторском једначином

$$r = \vec{e}\,\vec{r} + d, \tag{3.2}$$

где је $\vec{e}$ вектор а d реалан број, $\vec{e} \neq \vec{0}$, $d \neq 0$.

Означаваћемо са r интензитет вектора $\vec{r}$, а са $\vec{o}$ његов орт. Како је $|\vec{o}| = 1$, то је $\vec{o}\,' \perp \vec{o}$ (из $\vec{o}\,\vec{o} = 1$ следи да је $2\vec{o}\,\vec{o}\,' = (\vec{o}\,\vec{o})' = \vec{0}$). Имамо да је

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{o}, \\ \vec{r}\,' &= r'\vec{o} + r\vec{o}\,'. \end{aligned}$$

Одавде добијамо да је

$$\vec{r} \times \vec{r}\,' = (r\vec{o}) \times (r'\vec{o} + r\vec{o}\,') = rr'(\vec{o} \times \vec{o}) + r^2(\vec{o} \times \vec{o}\,') = r^2(\vec{o} \times \vec{o}\,').$$

Дакле,

$$r^2(\vec{o} \times \vec{o}\,') = \vec{s}.$$

Одавде даље следи

$$\vec{s} \times \vec{o} = r^2(\vec{o} \times \vec{o}\,') \times \vec{o} = r^2((\vec{o}\,\vec{o})\vec{o}\,' - (\vec{o}\,\vec{o}\,'))\vec{o} = r^2\vec{o}\,'.$$

Дакле,

$$r^2\vec{o}\,' = \vec{s} \times \vec{o}. \tag{3.3}$$

Одавде диференцирањем добијамо

$$2rr'\vec{o}\,' + r^2\vec{o}\,'' = \vec{s} \times \vec{o}\,'.$$

Следи

$$\begin{aligned} r^4\vec{o}\,'' &= \vec{s} \times (r^2\vec{o}\,') - 2rr'(r^2\vec{o}\,') = \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{o}) - 2rr'(\vec{s} \times \vec{o}) \\ &= (\vec{s}\,\vec{o})\vec{s} - (\vec{s}\,\vec{s})\vec{o} - 2rr'(\vec{s} \times \vec{o}) = -s^2\vec{o} - 2rr'(\vec{s} \times \vec{o}). \end{aligned}$$

Дакле

$$r^4\vec{o}\,'' = -s^2\vec{o} - 2rr'(\vec{s} \times \vec{o}). \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) и
$$\vec{r}\,'' = r''\vec{o} + 2r'\vec{o}\,' + r\vec{o}\,'',$$
добијамо
$$r^3\vec{r}\,'' = r^3r''\vec{o} + 2rr'(r^2\vec{o}\,') + r^4\vec{o}\,'' = r^3r''\vec{o} + 2rr'(\vec{s}\times\vec{o}) + (-s^2\vec{o} - 2rr'(\vec{s}\times\vec{o})).$$
Дакле
$$r^3\vec{r}\,'' = (r^3r'' - s^2)\vec{o}. \tag{3.5}$$
Из формуле (3.5) добијамо да је сила под чијим се дејством креће тачка M централна, тј. колинеарна њеном радијус вектору. Приметимо да смо то добили коришћењем само претпоставке 2 и претпоставке 1' која је слабија од претпоставке 1:

1'. *Путања тачке M је крива која лежи у равни која пролази кроз координатни почетак.*

Формула (3.2) је еквивалентна са
$$(1 - \vec{e}\,\vec{o})r = d.$$
Одавде редом добијамо
$$\begin{aligned}(-\vec{e}\,\vec{o}\,')r + (1 - \vec{e}\,\vec{o})r' &= 0,\\ -\vec{e}(r^2\vec{o}\,') + ((1 - \vec{e}\,\vec{o})r)r' &= 0,\\ -\vec{e}(\vec{s}\times\vec{o}) + dr' &= 0.\end{aligned}$$
Дакле,
$$dr' = \vec{e}(\vec{s}\times\vec{o}). \tag{3.6}$$
Даље имамо да је
$$\begin{aligned}dr'' &= \vec{e}(\vec{s}\times\vec{o}\,'),\\ dr^2r'' &= \vec{e}(\vec{s}\times(r^2\vec{o}\,')),\\ dr^2r'' &= \vec{e}(\vec{s}\times(\vec{s}\times\vec{o})),\\ dr^2r'' &= \vec{e}((\vec{s}\,\vec{o})\vec{s} - (\vec{s}\,\vec{s})\vec{o}),\\ dr^2r'' &= -s^2\vec{e}\,\vec{o},\\ dr^3r'' &= -s^2\vec{e}(r\vec{o}) = -s^2\vec{e}\,\vec{r} = s^2(d - r).\end{aligned}$$
Дакле,
$$dr^3r'' = s^2(d - r). \tag{3.7}$$
Из (3.5) и (3.7) добијамо да је $dr^3\vec{r}\,'' = (dr^3r'' - ds^2)\vec{o} = -s^2r\vec{o}$. Дакле, имамо да је
$$\vec{r}\,'' = -\frac{s^2}{d}\cdot\frac{\vec{o}}{r^2}.$$
Ако уведемо $k = s^2/d$, имамо да је
$$\vec{r}\,'' = -k\frac{\vec{o}}{r^2}. \tag{3.8}$$
Ово је управо Њутнов закон.

Литература

[1] Аносов, Д. В., *От Нютона к Кеплеру*, МЦНМО, Москва, 2006.