ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Драгољуб Милошевић

СЕДАМ РЕШЕЊА ЈЕДНОГ ЗАДАТКА

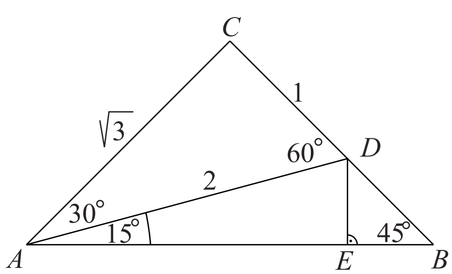
У једном уџбенику тригонометрије[1] налази се следећи задатак: *Наћи без употребе рачунских помагала вредности тригонометријских функција од* $\pi/12$.

Даћемо седам различитих решења наведеног заадтка, не користећи ни рачунска помагала, ни адиционе формуле, ни тригонометријске функције половине аргумента, ни основну тригонометријску идентичност ($\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $t \in \mathbf{R}$).

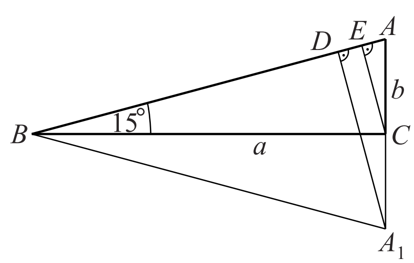
Решење 1. Конструишимо једнакокраки правоугли троугао ABC тако да је: $|AC| = |BC| = \sqrt{3}$ и $\angle ACB = 90°$, и тачку $D \in BC$ тако да је $\angle CDA = 60°$, сл. 1. Тада из правоуглог троугла ACD добијамо да је $|CD| = 1$ и $|AD| = 2$. Нека је $DE \perp AB$, $E \in AB$. Ако са x означимо дужину дужи BE, онда је и $|DE| = x$ (јер је $\triangle BDE$ једнакокраки), а $|BD| = x\sqrt{2}$. С обзиром да је $|BC| = |BD| + |DC|$, добијамо $\sqrt{3} = x\sqrt{2} + 1$, тј. $x = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Даље, имамо $|AE|^2 = |AD|^2 - |DE|^2 = 2^2 - (\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}))^2$, а одавде $|AE| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Коначно, на основу дефиниција тригонометријских функција добијамо:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \qquad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{|DE|}{|AE|} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = \frac{|AE|}{|DE|} = 2 + \sqrt{3}.$$



Сл. 1



Сл. 2

[1] Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић, Л. Милин: *Тригонометрија* (уџбеник са збирком задатака за II разред Математичке гимназије), Круг, Београд, 1999.

Решење 2. Конструишимо правоугли троугао ABC тако да је: $|AB| = 1$, $\angle ABC = 15^\circ$ и $\angle BCA = 90^\circ$, сл. 2. Одредимо тачку A_1 симетричну тачки A у односу на катету BC. Нека су тачке D и E подножја висина A_1D и CE троуглова ABA_1 и ABC, редом. Будући да је дуж CE средња линија троугла ADA_1, имамо $|CE| = h = \frac{1}{2}|A_1D|$. Како је $|A_1D| = \frac{1}{2}|A_1B|$ и $|A_1B| = |AB|$, добијамо $h = \frac{1}{4}$.

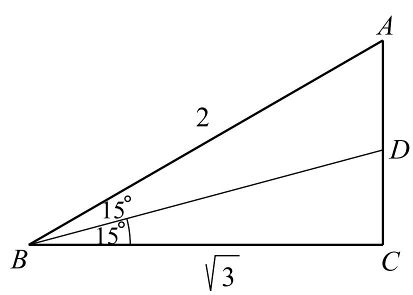
С обзиром да је у правоуглом троуглу хипотенузина висина једнака геометријској средини одсечака на хипотенузи, то из $\triangle ABC$ добијамо $h^2 = |AE|\cdot|BE|$, односно $\frac{1}{16} = x(1-x)$, где је $|AE| = x$. Последња једначина еквивалентна је са $x^2 - x + \frac{1}{16} = 0$, а њена решења су $\frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{3})$. Због тога је $|AE| = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$ и $|BE| = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$.

На основу Питагорине теореме примењене на правоугле троуглове BCE и ABC добијамо $a = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $b = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Сада имамо:

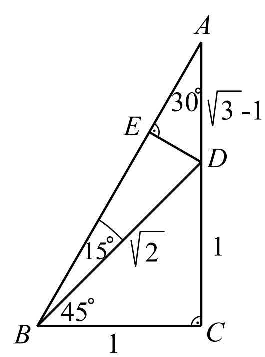
$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}.$$

Решење 3. Конструишимо правоугли троугао ABC тако да је: $|AC| = 1$, $\angle ABC = 30^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$, сл. 3. Нека симетрала угла ABC сече катету AC у тачки D. Тада је $|CD| : |DA| = |BC| : |BA|$, што због $|BA| = 2$, $|BC| = \sqrt{3}$ и $|AD| + |DC| = |AC| = 1$ даје $|CD| = \sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ и $|AD| = 2(2-\sqrt{3})$. Такође, имамо и $|BD| = 2\sqrt{3(2-\sqrt{3})}$. Сада лако из $\triangle BCD$ добијамо вредности тригонометријских функција од $\pi/12$. Довршите!



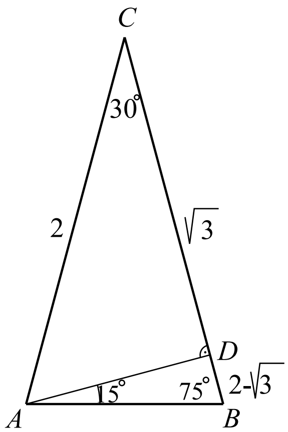
Сл. 3



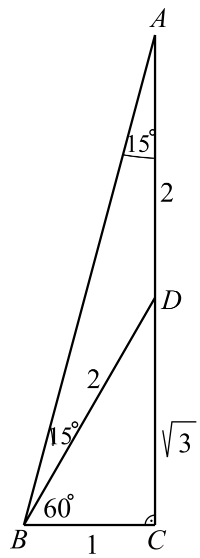
Сл. 4

Решење 4. Конструишимо правоугли троугао ABC тако да је: $|BC| = 1$, $\angle BAC = 30^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$, сл. 4. На катети AC одредимо тачку D тако да је $|CD| = |BC|$, а на хипотенузи AB тачку E тако да је $DE \perp AB$. С обзиром да је $|CD| = 1$, $|AB| = 2$, $|AC| = \sqrt{3}$ и $|CD| + |DA| = |AC|$, биће $|AD| = \sqrt{3} - 1$. Такође, $|DE| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. На основу Питагорине теореме примењене на правоугле троуглове ADE и BDE добијамо редом: $|AE| = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$ и $|BE| = \frac{1}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{3})}$ (јер је $|BD| = 2$). Најзад, из правоуглог троугла BDE добијамо вредности за $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$ и $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}$.

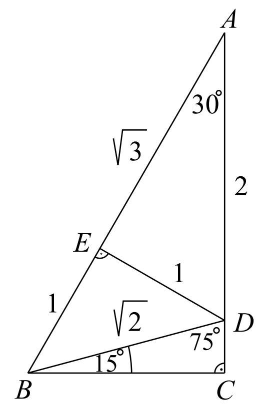
Решење 5. Конструишимо једнакокраки троугао ABC тако да је: $|AC| = |BC|$, $\angle BCA = 30^\circ$ и $|AD| = 1$ ($AD \perp BC$, $D \in BC$), сл. 5. Како је $|AC| = 2$ и $|CD| = \sqrt{3}$, добијамо $|BD| = |BC| - |CD| = 2-\sqrt{3}$. Даље имамо $|AB|^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2$, тј. $|AB| = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Из правоуглог троугла ABD добијамо и: $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{|BD|}{|AB|} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.



Сл. 5



Сл. 6



Сл. 7

Решење 6. Конструишимо правоугли троугао ABC тако да је: $|BC| = 1$, $\angle ACB = 90^\circ$ и $\angle BAC = 15^\circ$, сл. 6. На катети AC одредимо тачку D тако да је $\angle CBD = 60^\circ$. Тада је $|BD| = 2$ и $|CD| = \sqrt{3}$. Троугао ABD је једнакокрак, па је $|AD| = |BD| = 2$. На основу Питагорине теореме примењене на правоугли троугао ABC је $|AB|^2 = 1^2 + (2+\sqrt{3})^2$, тј. $AB = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$. Сада лако добијамо вредности тригонометријских функција од $\pi/12$. Довршите!

Решење 7. Конструишимо правоугли троугао ABC тако да је: $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$ и $|AD| = 2$, $\angle BDC = 75^\circ$ ($D \in AC$), сл. 7. Из правоуглог троугла ADE ($E \in AB$, $DE \perp AB$) добијамо $|DE| = 1$ и $|AE| = \sqrt{3}$. Троугао BDE је једнакокрак и правоугли, па је $|BE| = |DE| = 1$ и $|BD| = \sqrt{2}$. Како је $|BC| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, лако добијамо $|CD| = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. Најзад, из правоуглог троугла BCD добијамо тражене вредности тригонометријских функција од $\pi/12$.