

Никола Александров

## ПРИМЕНА СИМЕТРИЈА У КОНСТРУКТИВНИМ ЗАДАЦИМА

Час вежбања у првом разреду Гимназије у Босилеграду

### 1. Уводни део часа

Подсетимо се прво о следећем:

- Изометрије су преликавања која имају својство да чувају растојања међу тачкама.
- Осна симетрија  $\sigma_p$  пресликава сваку тачку  $M$  у њој симетричну тачку  $M'$  у односу на утврђену праву  $p$  – осу симетрије. Пишемо  $\sigma_p(M) = M'$ .
- Централна симетрија  $\sigma_O$  пресликава сваку тачку  $M$  у њој симетричну тачку  $M'$  у односу на утврђену тачку  $O$  – центар симетрије. Пишемо  $\sigma_O(M) = M'$ .
- Једно правило и поступак који се на основу тог правила примењује код изометрија: ако тачка  $M$  припада правој  $a$  (кргу  $k$ ), тада њена слика  $M'$  припада слици  $a'$  те праве (слици  $k'$  тог круга), тј.  $M \in a \implies M' \in a'$  (односно  $M \in k \implies M' \in k'$ ).

### 2. Главни део часа

Решићемо неколико задатака из којих се може видети како се осна и централна симетрија могу искористити при решавању неких задатака.

**ЗАДАТАК 1.** Дате су у једној равни тачка  $S$  и праве  $a$  и  $b$  које се секу и не садрже  $S$ . Одредити тачку  $A$  на правој  $a$  и тачку  $B$  на правој  $b$ , тако да тачка  $S$  буде средиште дужи  $AB$ .

*Решење. Анализа.* (Анализа задатка је, као што знамо, припремна етапа, али и најважнија јер припрема конструкцију односно даје кључ решавања.)

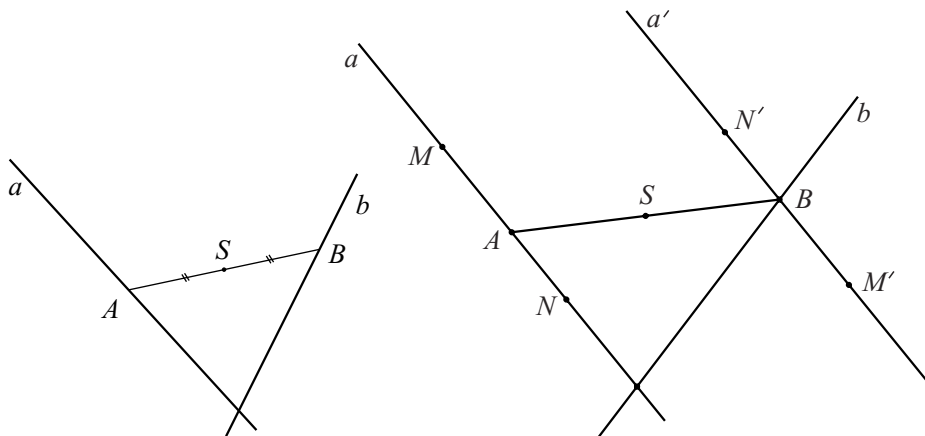
Претпоставимо да је задатак решен и скицирамо одговарајућу слику 1. Посматрајући пажљиво слику, ученици уочавају да су тачке  $A$  и  $B$  симетричне у односу на тачку  $S$ . Зато посматрамо централну симетрију  $\sigma_S$ . Тада  $\sigma_S(A) = B$ . Даље,  $A \in a \implies B \in a'$ , где је  $a' = \sigma_S(a)$ . Дакле,  $B \in a'$ , а како  $B \in b$ , следи да је  $\{B\} = b \cap a'$ , па је  $\sigma_S^{-1}(B) = A$ .

*Конструкција.* На основу извршене анализе, јасно је да треба обавити следеће конструкције. (Захтевам да ученици опишу конструкцију по корацима.)

1) Конструисемо праву  $a'$ , слику праве  $a$ , тј.  $a' = \sigma_S(a)$  помоћу двеју њених тачака  $M$  и  $N$ .

- 2)  $a' \cap b = \{B\}$ .
- 3)  $\sigma_S^{-1}(B) = A$ .
- 4)  $AB$  је тражена дуж.

Конструкцију обављају ученици под надзором наставника, сл. 2.



Сл. 1

Сл. 2

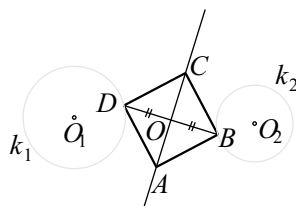
(Дакле, тражена фигура је, на основу анализе, нацртана коначним бројем основних конструкција. При том, као што видимо, конструкција је комплетна јер је сваки корак описан, а не само нацртан.)

*Доказ.* (Доказујемо да је конструкцијом одређена тражена фигура, тј. утврђујемо да ли конструисана фигура задовољава све услове задатка.)

По конструкцији, тачка  $S$  је центар симетрије правих  $a'$  и  $b'$ , па је  $SA = SB$  и тачке  $A$ ,  $S$  и  $B$  су колинеарне.

*Дискусија.* (Овде испитујемо услове решивости и број решења.)

Како се праве  $a$  и  $b$  секу, а права  $a' \parallel a$ , то се праве  $a'$  и  $b$  секу, па задатак има тачно једно решење.



Сл. 3

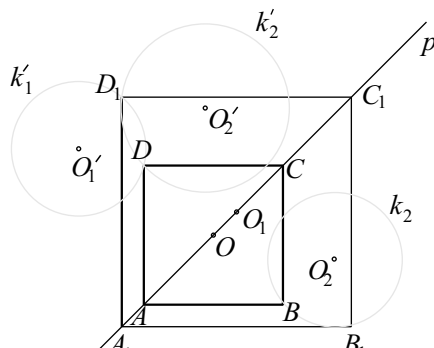
**ЗАДАТАК 2.** Конструисати квадрат  $ABCD$ , тако да два његова супротна темена  $A$  и  $C$  припадају датој правој  $p$ , а друга два темена  $B$  и  $D$  припадају датим круговима  $k_1$  и  $k_2$ .

*Решење. Анализа.* Нека је задатак решен и нека је  $ABCD$  тражени квадрат, сл. 3. Посматрамо осну симетрију  $\sigma_p$  (јер су ученици уочили да су тачке  $B$  и  $D$  симетричне у односу на дату праву  $p$ ). При том је  $\sigma_p(B) = D$ . Како  $B \in k_2$ , следи  $D \in k'_2$ . Даље,  $D \in k'_2 \wedge D \in k_1 \implies \{D\} \subset k'_2 \cap k_1$ , па је  $\sigma_p^{-1}(D) = B$ .

*Конструкција.* На основу анализе ученици изводе конструкцију по тачкама:

- 1)  $k'_2 = \sigma_p(k_2)$ ,
- 2) означимо са  $D$  једну од пресечних тачака кругова  $k'_2$  и  $k_1$ ,
- 3)  $\sigma_p^{-1}(D) = B$ ,
- 4)  $p \cap DB = \{O\}$ ,
- 5) темена  $A$  и  $C$  одредимо тако да је  $OD = OB = OC = OA$ .

Конструкција је приказана на сл. 4.



Сл. 4

*Доказ.* Доказ следи непосредно из дефиниције осне симетрије и чињенице да је осна симетрија изометрија.

*Дискусија.* Задатак има 2, 1 или 0 решења, у зависности од тога да ли се кругови  $k'_2$  и  $k_1$  секу, додирују или немају заједничких тачака.

### 3. Завршни део часа

У завршном делу часа ради постизања оперативности стечених знања дајем задатак 3 за самостални рад. За време његове израде надгледам њихов рад и пружам евентуалну помоћ.

**ЗАДАТАК 3.** Дат је угао  $pOq$  и у њему тачка  $A$ . Конструисати праву кроз  $A$  тако да одсечак између кракова угла буде тачком  $A$  преполовљен.

#### Домаћи задаци

1. Дат је круг  $k$ , права  $p$  и тачка  $S$ . Конструисати тачке  $M \in k$  и  $N \in p$  тако да  $S$  буде средиште дужи  $MN$ .
2. Дате су у једној равни права  $p$  и кругови  $k_1$  и  $k_2$ . Конструисати дуж  $AB$  тако да  $A \in k_1$ ,  $B \in k_2$  и да права  $p$  буде симетрала дужи  $AB$ .
3. Дат је угао  $xOy$  у тачке  $A$  и  $C$  у њему. Конструисати паралелограм  $ABCD$  тако да темена  $B$  и  $D$  припадају крацима  $Ox$  и  $Oy$ .