

Др Весна Јевремовић

СТАРОКИНЕСКА МАТЕМАТИКА

Постоје различита схватања о томе колико је кинеска математика утицала на математике у старим цивилизацијама Индије, Египта, Месопотамије, Грчке, а колико су математике тих цивилизација утицале на кинеску. Везе међу старим народима постојале су одавно, на шта указује, на пример, и постојање Пута свиле, трговачког пута који је „отворен“ 121. г. п.н.е. и који је спајао Кину и земље на западу, све до Медитерана. Постоје и чињенице које доказују да су нека открића у математици потекла из Кине или да су специфична кинеска, тј. да се нису појавила ни у једној од других наведених цивилизација. Време открића појединих достигнућа у науци једне цивилизације може да се процени и датирањем археолошких проналазака – тако имамо плочице од бамбуса, пронађене у Кини 1983. године, са „Књигом о рачунању“ из приближно II века п.н.е. Што се касније постигнутих резултата тиче, можемо да утврдимо време настанка неких од њих на основу прецизних и тачних података о штампању књига. Тако се сигурно зна да је у Кини најстарија датирана штампана књига, чувени будистички спис „Дијамантска сутра“, одштампана тачно 11. маја 868. године. Постоји извештај број сачуваних математичких књига.

Да бисмо говорили о некој области, треба да прецизирамо о чему ћемо говорити, па у том смислу, овај цитат из књиге [2] показује о колико широкој области је реч: „Математика је поступак *откривања* и *саопштавања* на *најекономичнији* начин *корисних* правила *поузданог* резоновања о *рачунању*, *мерењу* и *облику*.“ Са данашње тачке гледишта могло би се рећи да стари кинески математичари нису своје резултате саопштавали на најекономичнији начин, али су правила која су поставили свакако била корисна.

Математика као универзални писани језик и кинеско писмо имају једну велику сличност. Наиме, свуда у свету ће разумети запис $3 + 2 \times 4$, али ће припадници разних говорних група то различито изговарати. Исто је и са кинеским писмом – исти карактер ће припадници Хан националисти са различитих говорних подручја различито прочитати, али ће његово значење за све бити исто.

Решавање задатака

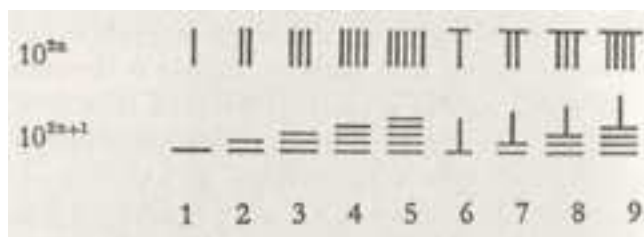
Данас решавање задатака који су формулисани „текстуално“, а стари кинески задаци су такви, захтева прво превођење на језик формула. Решења старих кинеских задатака су, међутим, такође давана текстуално, што је који пут за нас

тешко схватљиво. Такође, Кинези нису у својим старим књигама оставили ни аксиоме ни доказе какве „западна“ математика познаје (на основу наследства из Грчке). Њихове, кинеске, методе су једноставно различите од нама познатих, али изазивају и дивљење и чуђење – шта су све и када умели да реше.

Кинсеки задаци су практични, сликовити, а многи имају и посебна имена, тако да се тачно знало који се задатак подразумева под неким насловом.

Бројни систем

Математику најчешће везујемо за бројеве и бројање. Начин бројања и записивања бројева има утицаја на развој математике. У почетку, тј. почетком нове ере (по нашем рачунању времена), Кинези су користили позициони бројевни систем, са различитим записом за цифре на парним и цифре на непарним местима у запису природног броја, гледано с десна на лево.



Сл. 1. Цифре у старокинеском позиционом систему

Овакав систем писања био је у употреби од II века п.н.е. до IV века н.е, са празним местом за 0, а од VIII века су додавали и знак за нулу, кружић, вероватно под утицајем Индије. Пример представљен на слици 2 показује како се у старокинеском позиционом систему записивало одузимање. На десној страни слике имамо „превод“ на европски начин писања.



Сл. 2. Одузимање

Касније је начин писања цифара промењен; систем који је ушао у употребу, и који се и данас користи, није позициони.

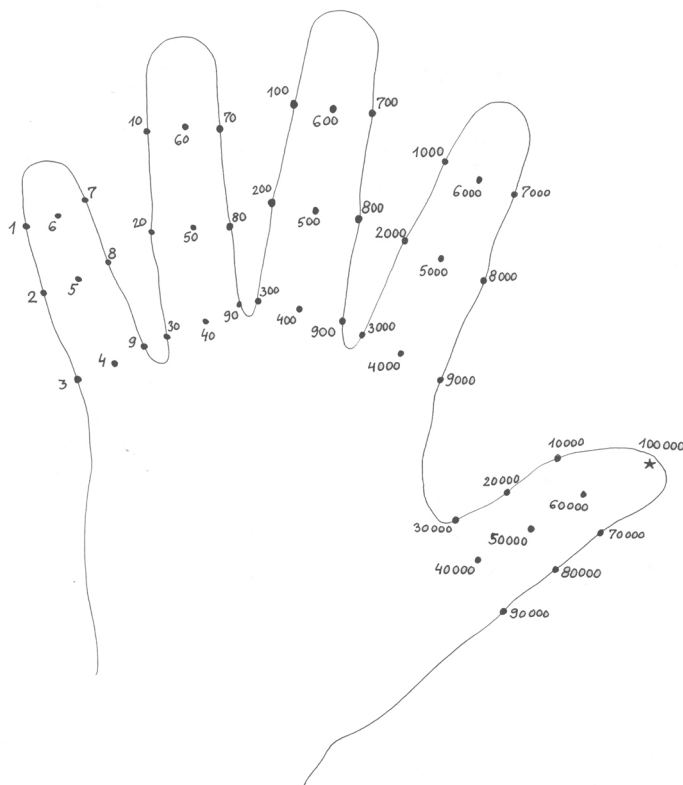
Посебно је значајно да су стари Кинези имали мерне јединице за дужину, површину, запремину и тежину у великом распону. Имали су посебне називе за веома велике бројеве, али су тачно знали шта ти бројеви представљају (нпр. број 10 на 44 степена). Рецимо и то да су основне мерне јединице за дужину биле од

реда величине око пола километра, која се звала један *ли*, до хиљадитих делова милиметра.

Називи најситнијих јединица су: дебљина власи косе, дебљина свилене нити и занемарљиво мало (што представља трећину микрометра). Суседне мерне јединице биле су пропорционалне са фактором 10.

Бројање на прсте

Док ми мислимо да се бројањем на прсте може стићи до 10, Кинези знају да може и до 100 000, што се може видети на слици 3. Сматра се да су знали да су прстима обе руке користећи овакав бројни систем и рачунају.



Сл. 3. Специјални систем бројања

Збирке задатака

Нема много сачуваних записа из најраније историје, што је разумљиво бар из два разлога – бамбусове плочице се тешко одржавају вековима (за разлику од, рецимо, глинених плочица из Месопотамије), а 213. г. п.н.е. Први кинески цар је заповедио да се спале многобројни списи и побију учењаци да би се спречио утицај конфучијанизма. Тада су нестали и многи математички списи.

Ипак, пронађена је књига на бамбусовим плочицама „Суан шу шу“ (Књига о рачунању) из периода око 200 година п.н.е. Књига је пронађена 1983. године у једној гробници за коју је поуздано утврђено да је запечаћена 186. г. п.н.е.

Касније има доста књига, и у некима су само понављани већ познати резултати, а неке су доносиле и нове резултате, као доприносе својих аутора.

Из тих књига се јасно види да нису намењене почетницима, јер су се нека знања подразумевала. Решења задатака су специфична, на одређени начин је свако за себе целина, па је било тешко самостално проучавање. Стога је јасно и да није било много математичара у Кини. Могуће је да су кинески математичари, као и кинески филозофи, бирали своје ученике и само одабране упућивали у поступке решавања задатака. У сваком случају математика јесте била цењена и експлицитно у једној књизи из астрономије, са почетка нове ере, стоји да је „способност закључивања и уопштавања обележје интелигентне особе“. Већ од шестог века математика је била део испита који се полагао ради пријема у државну службу. Математиком су се дакле превасходно бавили државни службеници, па је то други могући разлог за релативно мали број математичара у каснијим периодима кинеске историје.

Математика је такође примењивана и за утврђивање напредовања у служби. Наиме, остало је забележено да је један високи функционер изабрао међу три кандидата са истим стажом и једнаким квалитетима у служби, онога који је брже решио задатак: „Неколико лопова је украдо више ролни свиле и при подели плена су увидели да ако сваки узме по 6 ролни да ће им остати 5, а ако сваки узме по 7 ролни да им недостаје 8. Колико је било лопова и колико ролни свиле су узели?“

„Девет поглавља вештине рачунања“

Аутор ове најпознатије старокинеске збирке задатака је непознат. Књига је настала у време Хан династије (од 206. п.н.е. до 220. н.е.) и садржи 246 задатака који су подељени у девет области. Иначе, број 9 је сматран за мистичан, па су многе књиге које су касније штампане такође у својим насловима имале број 9.

Као што је и у наслову књиге речено, њу чини девет одвојених целина, чије садржаје укратко можемо овако превести:

1. Површине геометријских фигура, разломци
2. Проенти и пропорције, мерне јединице
3. Аритметичка и геометријска прогресија
4. Квадратни и кубни корен, странице на основу површине
5. Запремина тела
6. Расподела пореза
7. „Премало и превише“
8. Системи линеарних једначина
9. Особине правоуглих троуглова

У оквиру сваке области су постављани проблеми, а онда би било дато решење.

У вези са мерним јединицама напоменимо да су задаци били практичног карактера, нпр. изражавање тежине других врста зрнасте робе преко одговарајућих мера за пиринач.

„Премало и превише“ је метода за решавање једначина типа $f(x) = 0$, а суштина методе је да се нађе интервал у коме је тачна вредност решења. У једном крају интервала је вредност функције мања од нуле – „премало“, а у другом већа од нуле – „превише“. Затим се интерполацијом одређује приближна вредност корена једначине и та приближна вредност се узима за решење једначине.

Кинеска табла за рачунање



Сл. 4. Кинеска табла за рачунање

Кинеска табла за рачунање је специфичан кинески изум. Рачунање је обављано тако што се одређени број штапића постављао на свако поље и по утврђеним правилима се добијао збир, разлика, производ, количник. Али ту је и основа за неке методе комбинаторике као и за решавање система једначина.

На слици 4, чији је наслов „Учитељ и ученик постављају тешка питања један другом“, видимо како је изгледала табла за рачунање.

Слика 5 показује начин записивања система једначина на табли. На левој страни је европски начин, а на десној старокинески. Записани су само коефицијенти, при чему се негативни бројеви представљају штапићима друге боје.

$7x - 8y + 21 = 0$	
$3x + 2y - 29 = 0$	

Сл. 5. Систем линеарних једначина

Значајни резултати кинеске математике

Наведимо неке резултате старе кинеске математике, значајне или по својој ексклузивности или по чињеници да су се појавили пре сличних резултата у другим старим културама.

- Питагорина теорема

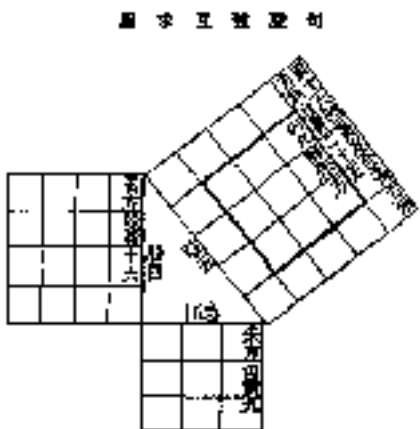
- Решавање система једначина
- „Премало и превише“
- Пермутације, комбинације, Паскалов троугао
- Низови и прогресије
- Магични квадрати
- Рачунање висина недоступних објеката
- ...

Сматра се да су знали за интерполацију и неке друге методе нумеричке математике. Знали су за разломке и операције са разломцима. Код разломака којима је вредност бројиоца мања од вредности имениоца користили су термине: син (бројилац), мајка (именилац). Знали су за решавање пропорција. При раду са полиномима користили су, сигурно од XIII века, а можда и раније, поступак који ми називамо Хорнерова шема.

Додајмо овим резултатима још један. У питању је статистика. Наиме, вековна искуства кинеског народа у медицини довела су до резултата (акупунктура, акупресура, постојање енергетских меридијана у телу, ...) а све су то резултати закључивања на основу великог броја посматрања, што је у основи статистичких метода оцењивања и тестирања хипотеза и данас.

Питагорина теорема

„Квадрат над хипотенузом, то зна свако дете, раван је квадратима над обе катете“ – чувени цитат из Нушићеве „Аутобиографије“, Кинези су знали одавно. У једном сачуваном рукопису, за који се тврди да је из периода п.н.е, и то чак 1000 година п.н.е, налази се текст који говори о особинама правоуглих троуглова. Такође су знали неколико доказа Питагорине теореме, а примењивали су је при решавању разноврсних задатака.



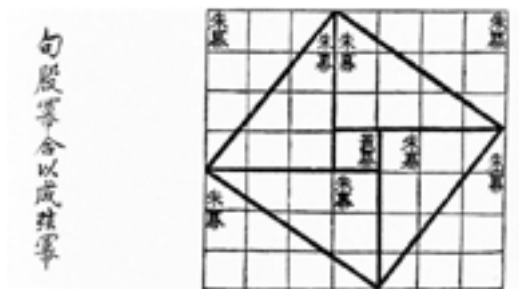
Сл. 6. Доказ Питагорине теореме

Од осталих доказа Питагорине теореме, издвајамо онај који је дат на слици 7. Преведно на језик формула доказ се добија из једнакости

$$(a + b)^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab + (a - b)^2.$$

Тај дијаграм има посебно име, сјуен-ту, а та чињеница говори у прилог томе да је познат „од давнина“. Сигурно је, према сачуваним записима, да је „Питагорина теорема“ била позната пре периода у коме је живео Питагора.

Познавали су и општи случај правоуглог троугла, а не само „основни“ са катетама 3 и 4 и хипотенузом 5.



Сл. 7. Дијаграм „сјуен-ту“, доказ Питагорине теореме

Решавање система линеарних једначина

Системе линеарних једначина су решавали шематски, а поступак је развијен полазећи од кинеске табле за рачунање. У збиркама се тачно знало како се који од коефицијената уз непознате назива и упутства су била тако и формулисана. Задатке су решавали и рачунањем детерминанте система и детерминанти које одговарају непознатим. Значи да су познавали оно што данас називамо Крамеровим правилом. Други начин који су примењивали је оно што се у „нашој“ математици назива Гаусова метода елиминације. Карактеристично је да су у тим почетним збиркама системи једначина увек били са једнаким бројем једначина и непознатих. У почетку срећемо углавном системе са 2 или 3 једначине, а касније и системе са више једначина.

Ево неколико примера:

1. Из три бурета у којима су биле једнаке количине пиринча, три лопова су крапа пиринча. Испоставило се да је у првом бурету остао 1 г' пиринча, у другом 1 сјинг 4 г'-а, и у трећем 1 г'. Први лопов је признао да је узимао пиринча помоћу лопате, други је користио дрвену ципелу, а трећи чинију. Први је лопов узимао само из првог бурета, други само из другог, а трећи из трећег. У лопату може да стане 1 сјинг 9 г', у дрвену ципелу 1 сјинг 7 г', а у чинију 1 сјинг 2 г'-а. Колико је који лопов узео пиринча ако је познато да је 10 г' један сјинг, 10 сјинг 1 тао а 10 тао један ш'?
2. Продато је два бивола и пет овнова а купљено је тринаест свиња и остало је хиљаду новчића. Када је продато три бивола и пет свиња, било је довољно новца да се купи девет овнова. Када се прода шест овнова и осам свиња да би се купило пет бивола, недостаје шестсто навчића. Колико коштају биво, ован и свиња?
3. Три снопа жита са парцеле где је био добар принос (добар сноп), два снопа са парцеле где је средњи принос (средњи сноп) и један сноп са парцеле где је био лош принос (лош сноп), дају 39 доуа зрна. Од два добра, три средња и једног лошег снопа добијена су 34 доуа зрна. Из једног доброг снопа, два средња и три лоша 26 доуа. Колико се добије из сваког доброг, средњег и лошег снопа?

Кинески поступак елиминације, за разлику од Гаусовог, који је „пронађен“

много векова касније, подразумева вертикални запис коефицијената система. У наведеном примеру, који преводимо у систем једначина

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

записали бисмо коефицијенте у облику

$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 39$$

$$2 \quad 3 \quad 1 \quad 34$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 26$$

а у кинеском решењу одмах су поређане једначине тако да се смањи број потребних операција (довођење „1“ у горњи леви угао) и поређани су вертикално, пошто су Кинези у то време писали усправно.

$$1 \quad 2 \quad 3$$

$$2 \quad 3 \quad 2$$

$$3 \quad 1 \quad 1$$

$$24 \quad 34 \quad 39$$

Код система линеарних једначина срећемо и задатке у којима постоји више непознатих него једначина, али уз неки додатни услов који омогућава да се решење одреди једнозначно. Наводимо два таква примера:

4. Пет породица користи исти бунар. Свака породица има ужад одређене дужине. Да би се доспело до површине воде, на два ужета породице А треба везати једно уже породице Б, на три ужета породице Б једно уже породице В, на четири В једно Г, на пет Г једно Д а на шест Д једно А. Колика је дубина бунара, а колика је дужина појединачних ужади сваке породице?

Овде имамо 5 једначина, а 6 непознатих, уз услов да се дубина бунара изражава бројем који обезбеђује да су вредности осталих непознатих целобројне и најмање могуће.

5. Петао кошта 5 новчића, кокошка 3, а три пилета један новчић. За 100 новчића купљено је 100 комади перади (живине). Колико је купљено петлова, кокошака и пилића?

Ово је један од знаменитих проблема из 5. века н.е, а карактеристичан је по томе што има три нетривијална решења (број купљених петлова, кокошака и пилића је редом: 12, 4, 84; 8, 11, 81 или 4, 18, 78) и једно тривијално (број купљених петлова је 0, кокошака 25 и пилића 75). Поступак решавања подразумева анализу великог броја могућности и постепено сужавање на скуп решења.

Систем нелинеарних једначина

Ево и једног од примера који показује да су умели да решавају и системе нелинеарних једначина:

- Одредити странице правоуглог троугла ако су познате његова површина и обим.

Дељивост бројева

Задацима које данас решавамо по тачно утврђеној методи, Кинези су решења давали у сваком посебном случају, па су нама оригинална решења који пут нејасна. Следећи пример то показује:

- Одредити број који при дељењу са 3 даје остатак 2, при дељењу са 5 остатак 3 и при дељењу са 7 остатак 2.

Поступак није компликован, и задатак можемо да решимо тако што ређамо прво све бројеве који задовољавају први услов, а то су бројеви 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ... , затим бројеве који задовољавају други услов: 8, 13, 18, 23, 28, ... и онда бројеве који задовољавају трећи услов: 9, 16, 23, 30, ... и гледамо у та три низа где се први пут поклопе вредности – а то је овде број 23.

Ево како гласи превод оригиналног решења:

„При дељењу са три остатак је два, зато узми 140, при дељењу са 5 остатак је 3, зато узми 63, при дељењу са 7 остатак је 2, зато узми 30. Све сабери и добићеш 233, па од тога одузми 210.“

Решење је очигледно тачно, али зашто је тако – зна само аутор.

Аритметичка прогресија

Аритметичке прогресије су познавали и знали изразе за збир аритметичке прогресије сигурно од петог века н.е.

На слици 8 представљена је пирамида у којој се у десет једнаких слојева налазе сфере једнаких димензија, „густо“ паковане. Овај пример показује да су Кинези знали и за принцип израчунавања запремине једне врсте тела преко збира великог броја мањих, једнаких тела познатих запремина која су уписана у тело чија се запремина одређује. У оквиру овог задатка треба „пробројати“ и колико укупно има сфера, а то је уствари питање одређивања збира аритметичке прогресије.



Сл. 8. Сфере уписане у пирамиду

Квадратна једначина и линеарна интерполација

У решењу следећег задатка налазимо неколико поступака – најпре одређивање збира аритметичке прогресије, а затим и решавање квадратне једначине методом „премало и превише“ применом линеарне интерполације.

- Један тркачки коњ и једна рага су кренули истовремено из Чанг-ана у државу Ти, која је од Чанг-ана удаљена 3000 лија. Првог дана је тркачки коњ прешао 193 лија, а сваког следећег дана је прелазио по 13 лија више. Рага је првог дана прешла 97 лија, а сваког следећег дана прелазила је по $1/2$ лија мање. Тркачки коњ је стигао до државе Ти и одмах пошао назад и на неком месту срео рагу. После колико дана су се срели и колико су прешли?

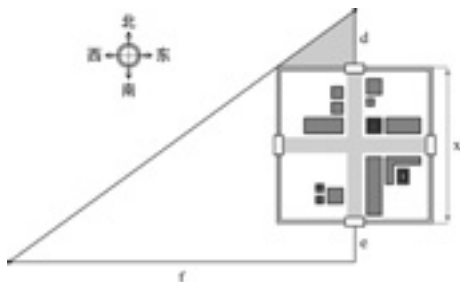
У поступку који је дат у решењу је најпре констатовано да је укупан пређени пут 6000 лија. За 15 дана путовања они, заједно, пређу мање, а за 16 дана више од 6000 лија. Према томе, решење је неки број између 15 и 16.

Да би одредили тај број, Кинези су уместо решавања одговарајуће, данас за нас једноставне, квадратне једначине применили линеарну интерполацију. Грешка апроксимације је врло мала, јер је график одговарајуће параболе „врло стрм“ између тачака 15 и 16. Добија се резултат 15 и $135/191$ дана.

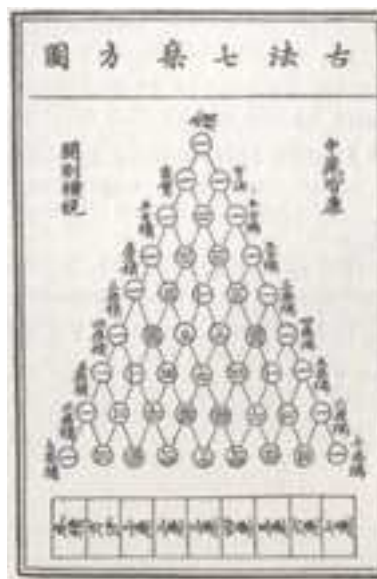
Сличност троуглова

Многобројни су задаци у којима се користи сличност троуглова да се одреде непознате димензије разних објеката.

- Зидине града су облика квадрата. На средини сваке стране се налазе врата. На растојању 20 корака од северних врата право ка северу налази се стуб. Ако се из града изађе на јужна врата и иде према југу 14 корака, а онда у правцу запада још 1775 корака, долазимо до места одакле се стуб може видети. Колико су дуге странице града?



Сл. 9. Илустрација уз задатак



Сл. 10. Паскалов троугао

Паскалов троугао

Овај запис на слици 10 потиче из 1303. године, а Паскал је живео око 3 века касније. Пошто се Паскал дописивао са језуитима, а њихови мисионари су у то доба били у Кини, могуће је да је Паскал тако сазнао за ову специфичну шему у којој је сваки број у једној врсти једнак збиру суседна два броја изнад њега.

Кинези су користили ову шему у вези са степеновањем бинума, тј. одређивањем степена израза $A + B$, и одређивањем корена другог, трећег и виших редова.

Постоје и археолошки налази из периода 200. г. п.н.е. до 200. г. н.е. на којима се види играње хазардних игара, тако да се може претпоставити да су знали и одређене проблеме из комбинаторике. Сигурно су знали за пермутације и комбинације.

Одређивање кубног корена

Овде наводимо пригинални кинески задатак:

- Одредити кубни корен броја 12812904.

У решењу се цифре резултата одређују с лева на десно. Најпре се констатује, опет идеја „премало и превише“, да је непознати број троцифрен, између 200 и 300. Дакле, резултат можемо да забележимо у облику $200 + 10b + c$. Ако у овом запису занемаримо за тренутак цифру јединица и процењујемо b , опет методом „премало и превише“, али истовремено користимо и формулу за трећи степен бинума (примена Паскаловог троугла), добијамо да је 234 тражени број.

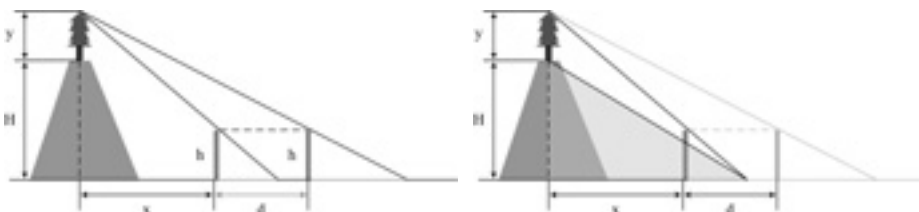
Сматра се да су такве процедуре примењивали пре нове ере.

Задатак Лију Хуија

Лију Хуи је један од познатих математичара из трећег века нове ере. Посебно је познат по решавању задатака у којима треба одредити висину недоступних објеката. Такође се зна да је, рачунајући површину правилног многоугла са 3072 странице који је уписан у дати круг, добио приближну вредност броја π на 5 децимала. Резултат који је добио Лију Хуи је 3,14159.

Књига са задацима Лију Хуија се зове „Задаци са морског острва“, јер су углавном била питања везана за одређивање димензије недоступних објеката. Ево једног карактеристичног примера.

- На брду расте бор непознате висине. У подножју, у равници, постављене су две мотке, свака висине 20 стопа. Оне су на истом правцу са дрветом, и на растојању једна од друге 50 корака. Врх дрвета и врх прве мотке одређују праву са тачком на земљи која је седам корака и четири стопе иза мотке. Врх дрвета са другом мотком одређује праву линију чији је крај на земљи удаљен осам корака и пет стопа од те мотке. Одредити вину бора и растојање од предње мотке до брда.

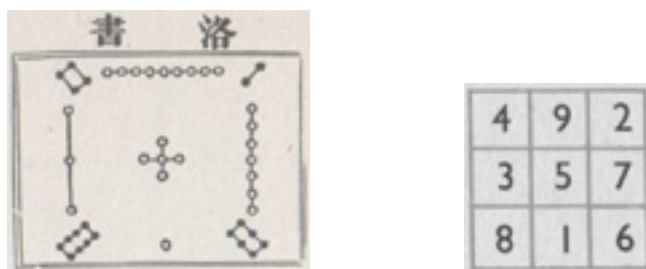


Сл. 11. Илустрације за задатак Лију Хуија

У поступку решавања се, најпре, коришћењем сличности троуглова одређује висина брда и бора заједно, а затим се (в. слику 11) одређују висина брда и висина бора.

Магични квадрати

Формирање магичних квадрата је интересантан задатак са математичке тачке гледишта. Кинези су им придавали и магијске особине. Најпознатији је магични квадрат Луо шу. По легенди то је слика са корњачиних леђа, и тај магични квадрат је открио легендарни цар Велики Ји око 2000. године п.н.е. На десној страни слике 12 је тај магични квадрат како бисмо га ми записали.



Сл. 12. Магични квадрат луо шу

Касније су се многи бавили конструисањем магичних квадрата већих димензија, али и магичних кругова и магичних коцки. Магични кругови су се састојали од концентричних кругова, а у пресеку тих кругова са пречницима су били распоређени бројеви тако да зборови по полупречницима буду једнаки и једнаки зборовима по обиму круга. Има примера и магичних коцки, када се на ивицама коцке распоређују бојеви тако да сви зборови буду једнаки.

Запремина тела

Кинези су знали формуле за запремину разних геометријских тела. Ево једног примера који показује познавање формула за запремину засеченог конуса. Број π су узимали са различитом прецизношћу.

- Дат је засечени конус са обимом доње основе 3 цанга, обимом горње основе 2 цанга и висином 1 цанг. Одредити запремину таквог конуса. (1 цанг = 3,3 метра.)

Кина и западна математика

Треба одати признање Кинезима што у сусрету са математиком запада своју математику нису у потпуности одбацили и заменили европском, тако да су се сачувале методе из давнина. Кинези су упознали европска научна достигнућа, па тако и математику, у већем обиму тек са доласком језуитских мисионара, од којих је најпознатији Матео Ричи. Чињеница да су га Кинези поштовали огледа се и у томе што је Матео Ричи један од ретких странаца који су добили место у званичним историјским списима у Кини.

У XVI и XVII веку су превођене европске књиге на кинески и обрнуто, а први Кинез који је објавио преводе европских дела из математике је Сју Гуанг-ћи, у XVI веку. Настава математике по узору на европски систем почела је у Кини тек почетком XX века, али није требало дуго чекати врхунске резултате – први докторат који је један Кинез одбранио на западу био је 1917. на Харварду. Прво учешће Кинеза на међународним математичким скуповима било је на Математичком конгресу у Цириху 1932. године, а Кинеско друштво математичара је основано 1935. године. Пре тога су већ имали и своје часописе, и тако у једном часопису из 1899. године срећемо констатацију:

„Западне методе не треба уздизати, а кинеске одбацити.“

Интересантно је поменути и то да су Кинези имали своју чувену породицу математичара (као што је то породица Бернули) – породицу Меи, која је живела у време династије Ђинг, у XVII и XVIII веку. Један од њих је, на царски захтев, написао енциклопедију математике.

Литература

- [1] В. Д. Чистяков: *Старинные задачи по элементарной математике*, Высшэйшая школа, Минск, 1978.
- [2] Л. Хогбен: *Стварање математике*, Вук Караџић, Београд, 1972.
- [3] J. T. M. Needham: *Science and Civilization in China, Vol. 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.