Др Павле Младеновић

УПОРЕЂИВАЊЕ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА

Ако су x_1 и x_2 реални бројеви, онда важи једна од релација: $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$. Ако су X_1 и X_2 случајне величине, које су дефинисане на истом простору вероватноћа, онда су $\{X_1 < X_2\}$, $\{X_1 = X_2\}$, $\{X_1 > X_2\}$ догађаји који имају одређене вероватноће. С обзиром на то да је

$$P\{X_1 < X_2\} + P\{X_1 = X_2\} + P\{X_1 > X_2\} = 1,$$

то највише један од догађаја $\{X_1 < X_2\}$ и $\{X_1 > X_2\}$ може имати вероватноћу већу од $1/2$. Нека је $\Omega = \{0, 1\}$ скуп исхода случајног експеримента и нека је вероватноћа сваког од исхода 0 и 1 једнака $1/2$. Ако су X_1 и X_2 случајне величине дефинисане једнакостима $X_1(0) = 0$, $X_1(1) = 1$, $X_2(0) = 1$, $X_2(1) = 0$, онда важи $P\{X_1 > X_2\} = P\{X_1 < X_2\} = 1/2$.

Ако су x_1, x_2 и x_3 реални бројеви, такви да је $x_1 > x_2$ и $x_2 > x_3$, онда важи и неједнакост $x_1 > x_3$. То је добро познато својство транзитивности релације $>$. Ако су X_1, X_2 и X_3 случајне величине, које су дефинисане на истом простору вероватноћа, онда су

$$(*) \qquad \{X_1 > X_2\}, \quad \{X_2 > X_3\}, \quad \{X_3 > X_1\}$$

догађаји који имају своје вероватноће. Познато је да постоје случајне величине X_1, X_2 и X_3, такве да сваки од догађаја $(*)$ има вероватноћу већу од $1/2$.

1. Нека је простор вероватноћа одређен на следећи начин: скуп исхода је $\Omega = \{(3,2,1), (2,1,3), (1,3,2)\}$ и сваки од исхода $\omega_1 = (3,2,1)$, $\omega_2 = (2,1,3)$ и $\omega_3 = (1,3,2)$ има вероватноћу $1/3$. Случајне величине X_1, X_2 и X_3 дефинисане су на следећи начин:

$$X_i(\omega_j) = i\text{-та координата тројке } \omega_j,$$

тј. $X_1((3,2,1)) = 1$, $X_2((2,1,3)) = 1$ итд. Одредити вероватноће догађаја $(*)$.

Решење. Сваки од догађаја $(*)$ има вероватноћу $2/3$. На пример,

$$P\{X_1 > X_2\} = P\{(3,2,1), (2,1,3)\} = 2/3.$$

Констатујмо још чињеницу да су X_1, X_2 и X_3 *зависне* случајне величине. На пример, $P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = 0$, али је $P\{X_1 = 1\} \cdot P\{X_2 = 1\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

2. Да ли постоје случајне величине X_1, X_2 и X_3, које су дефинисане на истом простору вероватноћа и такве да сваки од догађаја $(*)$ има вероватноћу већу од $2/3$?

Решење. Не постоје! То се може доказати на следећи начин: Нека су X_1, X_2 и X_3 произвољне случајне величине дефинисане на истом простору исхода Ω. За сваки $\omega \in \Omega$ важи бар једна од неједнакости $X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$, $X_2(\omega) \leqslant X_3(\omega)$, $X_3(\omega) \leqslant X_1(\omega)$. (Ако би важило супротно, тј. $X_1(\omega) > X_2(\omega)$, $X_2(\omega) > X_3(\omega)$, $X_3(\omega) > X_1(\omega)$, онда бисмо сабирањем ових неједнакости добили контрадикцију.) Означимо $A_1 = \{X_1 > X_2\}$, $A_2 = \{X_2 > X_3\}$, $A_3 = \{X_3 > X_1\}$. Ако је $\overline{A}_i$ ознака комплемента догађаја A_i, онда важи

$$P(\overline{A}_1) + P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_3) \geqslant P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3) = 1.$$

Из ове неједнакости следи: није сваки од бројева $P(\overline{A}_1)$, $P(\overline{A}_2)$, $P(\overline{A}_3)$ мањи од $1/3$ (у противном би њихов збир био мањи од 1), односно није сваки од бројева $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$ већи од $2/3$.

3. Нека је $n \geqslant 3$. Одредити највећи број p_n који има следеће својство: постоје случајне величине $X_1, X_2, \ldots, X_n$, које су дефинисане на истом простору вероватноћа и такве да сваки од догађаја

$$(**) \qquad \{X_1 > X_2\}, \quad \{X_2 > X_3\}, \quad \ldots \quad \{X_{n-1} > X_n\}, \quad \{X_n > X_1\}$$

има вероватноћу која није мања од p_n.

Решење. Доказаћемо да је $p_n = \dfrac{n-1}{n}$. Нека је Ω скуп следећих n једнако вероватних исхода случајног експеримента:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1),\\
\omega_2 &= (n-1, n-2, \ldots, 2, 1, n),\\
\omega_3 &= (n-2, \ldots, 2, 1, n, n-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\omega_n &= (1, n, n-1, n-2, \ldots, 2).
\end{aligned}$$

Аналогно као у задатку 1 дефинишемо случајне величине $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$X_i(\omega_j) = i\text{-та координата } n\text{-торке } \omega_j.$$

Непосредно се проверава да важи

$$P\{X_1 > X_2\} = P\{X_2 > X_3\} = \cdots = P\{X_n > X_1\} = \frac{n-1}{n}.$$

Случајне величине $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из размотреног примера су *зависне*.

Потпуно аналогно као у задатку 2 доказујемо тврђење: ако су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ произвољне случајне величине (дефинисане на истом простору вероватноћа), онда није могуће да сваки од догађаја $\{X_1 > X_2\}$, $\{X_2 > X_3\}$, $\ldots$, $\{X_n > X_1\}$ има вероватноћу већу од $\dfrac{n-1}{n}$.

Напомена. Означимо са q_n највећи број који има следеће својство: постоје *независне у потпуности* случајне величине $X_1, X_2, \ldots, X_n$, које су дефинисане на истом простору вероватноћа и такве да сваки од догађаја (**) има вероватноћу која није мања од q_n. Јасно је да је $q_n \leqslant p_n$, јер су бројеви q_n одређени ужом класом n-торки случајних величина. Интересантно је питање да ли се бројеви q_n могу и експлицитно одредити?

Иако је у теорији вероватноћа најчешће случај да се лакше решавају задаци који се односе на независне случајне величине, него аналогни задаци који узимају у обзир и зависне случајне величине, овде је ипак знатно теже одредити бројеве q_n, него бројеве p_n. З. Усискин је доказао да је $(q_n)_{n\geqslant 3}$ растући низ бројева и да важе једнакости

$$q_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad q_4 = \frac{2}{3}, \quad \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} q_n = \frac{3}{4}.$$