НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2005, L, 3, стр. 1–8

Др Бранислав Боричић

ПОТРЕБНО $\leftarrow$ ДОВОЉНО

Импликација као *логички везник*, односно као *логичка операција*[1], својом улогом у математици превазилази значај свих осталих логичких појмова. Наиме, свако математичко тврђење се исказује реченичном формом „*Ако A, онда B*“, чему одговара формално поимање импликације и симболички запис $A \to B$. Стога и импликација мора заузети централно место у математичкој логици. Посматрана реченица се у природном језику може још исказати и на један од следећих еквивалентних начина:

A је довољан услов за B.

B је потребан услов за A.

A имплицира B.

B, ако A.

Из A следи B.

Из претпоставке A се може извести закључак B.

A, само ако B.

али симболички увек као $A \to B$ ($A \Rightarrow B$ или, што ћемо видети касније, $A \vdash B$)[2].

С друге стране, и изван математике, посматраном реченичном формом се изражава узрочно-последична веза која, у свакој научној дисциплини, увек представља основни предмет истраживања. Тако да ни поимање импликације као *бинарне* (или чак и сложеније) *релације* није реткост.

Импликација је у тесној вези са скуповном релацијом инклузије. У наивној теорији скупова инклузију међу скуповима X и Y формално уводимо на следећи начин:

$$X \subseteq Y \text{ акко(деф) } \forall x(x \in X \to x \in Y),$$

дакле, посредством импликације. Но како је појам подскупа у контексту математике лакше интуитивно објаснити, онда ствари, са дидактичког становишта, није

[1] Да ли импликацију третирамо као логички везник или као логичку операцију није од суштинског значаја за нас у овом чланку. Први приступ је карактеристичан за логичко-лингвистичке анализе, док други доминира у алгебарским разматрањима.

[2] При чему, разуме се, и овде има изузетака. Тако се, на пример, у логичком програмирању основна форма „*Ако A, онда B.*“ записује у облику $B \leftarrow A$.

лоше окренути и, у неким фазама, нарочито на почетку, и када се ради о ученицима нижих разреда, *преко релације инклузије дефинисати и објашњавати импликацију.*

С тим у вези ће се појавити и она парадоксална ситуација у вези са празним скупом и њу увек треба до краја објаснити. Имамо да је, за сваки скуп X, $\emptyset \subseteq X$, што не мора бити увек јасно, поготову када се то повеже са таутологијом $\perp \to A$, за сваку формулу A, где смо са $\perp$ означили константу *апсурда*, односно исказ чија је истинитосна вредност увек *лаж*. Наиме, у складу с тим, и следеће, са математичког становишта потпуно неупотребљиво и бесмислено тврђење, представља једну „истину“: *ако* $x \leq 6 \wedge x \geq 7$, *онда је троугао* ABC *правоугли.* Дакле, из претпоставке која представља неки противречан услов, увек, као закључак можемо извести било шта. То је, колико неупотребљиво, толико и парадоксално, јер, ето, логичко закључивање, које базира на класичној (двовалентној) логици, може довести у узрочно-последичну везу и два тврђења која су, очигледно, по свом садржају међусобно потпуно неповезана.

У овом кратком осврту ћемо изнети неколико дилема и предлога, пропраћених одговарајућим примерима, а у вези са начином третирања импликације у разним фазама школовања ученика.

Импликација у основној школи

Претрпани, несистематични и неусклађени програми дисциплина присутних у наставним плановима основних школа, с једне, као и узраст ученика, с друге стране, не пружају неке нарочито повољне могућности за егзактно третирање импликације као релације *„претпоставка – последица“.* Међу ретке примерене могућности спадају, на пример, дисциплине у којима су већ изграђени неки појмови који се међусобно разликују по степену општости. У географији би то могло бити као: *„Ако се неки град налази у Србији, онда се он налази и у Европи.“* У биологији: *„Ако је неко биће сисар, онда је то биће кичмењак.“* Математика, при обради појма подскупа, пружа могућност да се, кроз неколико елементарних примера, издвоји и нешто простора за импликацију и то без великих амбиција. Ту се чини да би умесни илустративни примери могли имати следећи облик:

Пример. Можемо посматрати подскупове скупа $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ природних бројева. Рецимо да је $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Тада имамо могућност да јасно истакнемо да важи:

$$x \in A \to x \in B$$

али да не важи:

$$x \in B \to x \in A$$

Прилика је, такође, да се укаже и да важи:

$$x \notin B \to x \notin A$$

тј. *закон контрапозиције*, али без нарочитог инсистирања на томе, јер узраст ученика не би допустио да се то до краја и са успехом апсолвира. Добро би било посматрати и неки низ подскупова:

$$\{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$$

и поставити питање: *Да ли постоји и неки скуп који би био „испред" ових скупова?* Тада би се по први пут, надамо се уверљиво, ученик суочио са „парадоксом" празног скупа:

$$\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}.$$

Све би то, наравно, било упутно пропратити и одговарајућим графичким средствима. △

Верујемо да би и формуле које дајемо у следећем примеру биле поучне и разумљиве.

Пример. Да је производ нека два броја a и b једнак нули ако и само ако бар један од тих бројева је нула, формално се може записати као:

$$ab = 0 \;\leftrightarrow\; a = 0 \lor b = 0$$

Слично, јасно је:

$$ab \neq 0 \;\leftrightarrow\; a \neq 0 \land b \neq 0$$

(Ово је и добра прилика да се ученицима предочи разлика између значења дисјункције ($\lor$) и конјункције ($\land$), и овакву прилику не треба пропустити!) Одавде изводимо и следећи низ ВАЖЕЋИХ импликација блиских датим формулама:

$$\begin{aligned} a = 0 &\to ab = 0 \\ b = 0 &\to ab = 0 \\ ab \neq 0 &\to a \neq 0 \\ ab \neq 0 &\to b \neq 0 \end{aligned}$$

али, са дидактичког становишта, исто тако значајан низ НЕВАЖЕЋИХ импликација:

$$\begin{aligned} a \neq 0 &\to ab \neq 0 \\ b \neq 0 &\to ab \neq 0 \\ ab = 0 &\to a = 0 \\ ab = 0 &\to b = 0 \end{aligned}$$

сваку од којих би било упутно оповргнути одговарајућим контрапримером. △

Импликација у средњој школи

У средњим школама о импликацији се може говорити у оквиру математике, граматике и логике, али и других наставних садржаја. Штавише, као посебно интересантан и захвалан контекст сада може бити анализа следа неких историјских догађаја, хемијских реакција или физичких законитости. Сада примери из математике могу бити и нешто сложенији.

Први часови средњошколског програма математике се односе на алгебру логике и рад са истинитосним таблицама. То пружа могућност разматрања примера чисто логичке садржине.

Пример. Помоћу одговарајућих истинитосних таблица може се показати да су исказне формуле $P \wedge Q \to P$ и $P \to P \vee Q$ таутологије, одакле, редом, можемо установити да је $P \wedge Q$ довољан услов за P, те да је P довољан услов за $P \vee Q$, односно да је P потребан услов за $P \wedge Q$, и да је $P \vee Q$ потребан услов за P, ма какви били искази P и Q. $\triangle$

Расправа о нулама и знаку квадратног тринома се суштински своди на горњи пример о производу два реална броја.

Пример. Знајући да су корени једначине $x^2 - 15x + 56 = 0$ бројеви 7 и 8, што се може записати као:

$$x^2 - 15x + 56 = 0 \;\leftrightarrow\; x = 7 \vee x = 8,$$

лако можемо образложити и следеће еквиваленције:

$$\begin{aligned} x^2 - 15x + 56 > 0 \;&\leftrightarrow\; x < 7 \vee x > 8 \\ &\leftrightarrow\; x \in (-\infty, 7) \cup (8, +\infty) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x^2 - 15x + 56 < 0 \;&\leftrightarrow\; x > 7 \wedge x < 8 \\ &\leftrightarrow\; x \in (7, 8) \end{aligned}$$

Одавде, изостављењем појединих услова с десне стране еквиваленције, добијамо следеће ваљане импликације:

$$\begin{aligned} x < 7 &\to x^2 - 15x + 56 > 0 \\ x^2 - 15x + 56 < 0 &\to x > 7 \end{aligned}$$

док, јасно, обрнуто не важи ни у првом, ни у другом случају. Образложење горњих тврђења би било могуће дати и преко релације инклузије, што се своди на следеће чињенице: $x \in (-\infty, 7) \to x \in (-\infty, 7) \cup (8, +\infty)$ и $x \in (7, 8) \to x \in (7, +\infty)$, тј. $(-\infty, 7) \subseteq (-\infty, 7) \cup (8, +\infty)$ и $x \in (7, 8) \subseteq (7, +\infty)$, респективно. $\triangle$

Једна ученицима веома блиска и потпуно позната чињеница из геометрије, Питагорина теорема, пружа могућност конструкције једног примера.

Пример. Ако са a, b, c обележимо дужине страница неког троугла, онда на тему Питагорине теореме можемо правити следеће варијације: *дати троугао је правоугли* акко $a^2 + b^2 = c^2 \;\vee\; a^2 + c^2 = b^2 \;\vee\; b^2 + c^2 = a^2$. Одавде „скраћујући“ услов здесна добијамо: *Ако* $a^2 + b^2 = c^2 \;\vee\; a^2 + c^2 = b^2$*, онда је посматрани троугао правоугли.* Али обрнуто не важи и то у случају када је a дужина хипотенузе посматраног троугла. $\triangle$

У четвртом разреду, када се обрађују и елементи диференцијалног рачуна, захвална су за разматрање и многа од основних тврђења.

Пример. Теорема о стационарним тачкама, позната у литератури и као Фермаова теорема (P. Fermat), гласи: да би у тачки a функција f, која је диференцијабилна у некој околини те тачке, достигла свој локални екстрем, *потребно је* (али не и довољно) да је $f'(a) = 0$. $\triangle$

Импликација на факултету

Интелектуални ниво и интересовање ученика(–студената) који учествују у процесу високошколског образовања, мада нас тако често дубоко разочарају, пружају могућности комплекснијег третирања појма последичности и то пре свега у контексту оних специфичности које у себи носи сама методологија науке која се изучава. Ни у ком случају се извесне напомене чисто формалне природе не могу изоставити, а пуко разматрање таблице истинитости помоћу које се дефинише импликација у контексту класичног двовалентног исказног рачуна ни издалека није довољно да објасни суштину проблема дедукције. Ипак, издвојићемо неке ситуације око којих постоји општа сагласност. Случајеви када из нетачних хипотеза ($\perp$) изводимо било какав закључак (тачан ($\top$) или нетачан ($\perp$)) су тривијални и неупотребљиви. Око случаја када из тачних хипотеза ($\top$) изводимо нетачан закључак ($\perp$) такође нема спора, јер импликација $\top \to \perp$ је увек одраз једног погрешног закључивања. Остаје, дакле, само још случај $\top \to \top$ из којег се црпи инспирација за логичко анализирање свеколиких типова закључивања. Наиме, само на бази различитих нијанси у третирању исказа $A \to B$, у случају када су и A и B тачни искази, може се обавити једна сложена класификација фундаментално различитих логичких система, који се опет, сваки за себе, темеље и оправдавају одговарајућим филозофским приступима основама математике и методологије научног истраживања уопште. Само на нивоу исказне логике на бази импликације можемо разлучити, најпре од двовалентне класичне логике класу поливалентних некласичних логика, које се, даље, не више само по броју истинитосних вредности, већ по другим особинама, разврставају на конструктивистичке (међу којима интуиционистичка логика заузима најважније место), релевантне, линеарне и БЦК-логике. Логички системи из ових група се могу међусобно комбиновати са циљем да се добије систем који поседује жељена својства.

Пример. У доњим таблицама су предочене неке могућности за дефинисање истинитосних вредности импликације у тровалентној и четворовалентној логици:

$\to$	$\perp$	2	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	2	$\top$

$\to$	$\perp$	2	3	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
3	$\perp$	2	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	2	3	$\top$

Ово, наравно, не би биле и једине могућности за задавање истинитосних вредности за импликацију. $\triangle$

С друге стране, обогаћујући исказни језик, повећавамо и његове изражајне могућности. Тако можемо доћи до модалних и предикатских логичких рачуна, чију ће природу, у основи, опет битно одређивати дефинисање импликације.

Посебно интересантну могућност представљају логички системи у оквиру којих је могуће расправљати и о самој поузданости закључивања. Таквим разматрањима се бави и теорија расплинутих (fuzzy) логика.

Пример. Правило закључивања према којем из хипотеза A и $A \to B$ изводимо закључак B је познато под називом *modus ponens* и исто је присутно у свим горе поменутим логичким системима. Природно се намеће потреба за формалним описом једне варијанте овог правила у којој ће доћи до изражаја поузданост сваког од присутних елемената. Рецимо да поузданост неког исказа A меримо на скали од 0 до 1. Ако са A^a означимо чињеницу да „поузданост исказа A износи бар a“, за неки $a \in [0,1]$, онда би *modus ponens* могао добити следећу форму: из A^a и $(A \to B)^b$ изводимо B^c, одакле бисмо, зависно од нашег избора за c (на пример, $c = ab$ или $c = \min(a,b)$, $\dots$), могли да определимо наш став у вези са поузданошћу закључка B. Слична дискусија би се могла водити и када бисмо, уместо поузданости, посматрали вероватноћу остваривости или истинитости одређеног исказа. $\triangle$

Овим примером смо заправо хтели да укажемо читаоцу на тенденцију, присутну у савременој литератури, да се на егзактан начин говори о методима приближног и непоузданог логичког закључивања. У суштини истим проблемом, дакле, приближним и непоузданим закључивањем, са могућностима процењивања те непоузданости, бави се и статистика, па би и изучавање особина разних „статистичких импликација“, тј. статистичких метода у откривању и формализовању узрочно-последичних односа, представљало такође допринос теми којом се овде бавимо.

Извођење из хипотеза, доказ и импликација

Основни логички појам је *релација дедукције* (или *релација последичности*) која успоставља везу између хипотеза, с једне, и закључка, са друге стране. Стога, потпун опис неког логичког система подразумева, пре свега, егзактно задавање одговарајуће релације последичности. У савременој литератури се, при синтаксном описивању релације дедукције, користе, углавном, три метода. Један од њих је везан за тзв. системе природних дедукција, други за рачуне секвената и трећи, који ћемо овде приказати, су тзв. системи Хилбертовог типа (D. Hilbert). Заједничко за све поменуте методе је то што у њиховој основи имамо индуктивну дефиницију, која је, просто, у оваквим случајевима неизбежна.

Прескочићемо опис уобичајеног поступка формирања скупа формула For, али ћемо претпоставити да скуп исказних везника свакако садржи симбол *импликације* ($\to$). Један логички систем, у ознаци $\mathcal{L}$, биће задат описом одговарајуће релације дедукције. Ту релацију ћемо означавати са $\vdash_{\mathcal{L}}$ или, једноставније, само са $\vdash$ и она ће свакако имати следећа својства:

(*i*) $\vdash \subseteq \mathcal{P}(For) \times For$

(*ii*) *Ако* $A \in \Gamma$, *онда* $\Gamma \vdash A$.

(*iii*) *Ако* $\Gamma \vdash A$, *онда* $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$.

(*iv*) *Ако* $\Gamma \vdash A$ *и* $\Pi \cup \{A\} \vdash B$, *онда* $\Gamma \cup \Pi \vdash B$.

Ове особине се могу добити као последица следеће егзактне дефиниције *логичког* или *дедуктивног система*. Логички систем, над скупом формула For, једнозначно ће бити одређен извесним скупом *аксиома* Ax и једним оваквим одређењем *извођења из хипотеза*: $\Gamma \vdash A$ акко (деф.) постоји коначан низ формула $A_1, A_2, \dots, A_n$ такав да важи $A_n = A$ и свака од формула A_i $(1 \leq i \leq n)$ овог низа задовољава неки од услова:

(i) $A_i \in Ax \cup \Gamma$

(ii) *Међу формулама* $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ *постоје две формуле облика* B *и* $B \to A_i$.

У овом случају кажемо да се у посматраном логичком систему из *скупа хипотеза* Γ *може извести формула* A. Уколико је $\Gamma = \emptyset$, кажемо да се у нашем систему формула A може *доказати*, што означавамо са $\vdash A$, а формулу A називамо *теоремом* овог система.

Услов (ii) претходне дефиниције заслужује и краћи коментар. У њему је имплицитно садржано већ поменуто правило логичког закључивања – *modus ponens*.

Из свега што смо до сада казали о логичким системима, можемо закључити да скуп аксиома има најзначајнију улогу у одређењу једног логичког система. Наиме, одлучујући се за један одређени скуп аксиома, ми заправо вршимо избор једног логичког система.

У оквиру теорије логичких система посебна пажња се посвећује проблемима *непротивречности* (или *конзистентности*) логичког система и *независности* његових аксиома.

За неки логички систем кажемо да је непротивречан уколико постоји бар једна формула која није теорема тог система. Оваква дефиниција конзистентности, због своје општости, не одговара у довољној мери нашој интуицији о непротивречности. Чешће се у својству дефиниције непротивречног система узима услов према којем се у посматраном систему не може у исто време извести нека формула A као и њена негација $\neg A$. Но није тешко проверити да би оваква дефиниција непротивречности била еквивалентна претходној уз претпоставке које су у врло широкој класи логичких система задовољене. Претпоставке су да се у посматраном логичком систему, из произвољних формула A и B може извести, као закључак, формула $A \wedge B$, што би одговарало тзв. правилу *адјункције*, као и могућност извођења произвољне формуле B из претпоставке $A \wedge \neg A$. Ова друга дефиниција, очигледно, подразумева присуство везника негације и конјункције у језику система, па, стога, прва, у погледу општости, има предност. Приметимо и то, да би се противречан скуп формула Γ могао окарактерисати задовољењем услова $\Gamma \vdash$, што би се могло протумачити да се из скупа формула Γ може извести 'празна формула', односно апсурд $\perp$.

Покажимо сада еквивалентност двеју наведених дефиниција. Претпоставимо ли да систем није конзистентан у смислу прве дефиниције, то ће онда свака формула A бити теорема тог система, заједно са својом негацијом $\neg A$, па систем не би могао бити конзистентан ни у смислу друге дефиниције. Обрнуто, ако претпоставимо да систем није конзистентан у смислу друге дефиниције, то би значило да постоји нека формула A таква да су и A и $\neg A$ доказиве у том систему. Одавде бисмо, по правилу адјункције, извели и теорему $A \wedge \neg A$, но како се из формуле $A \wedge \neg A$ може, по нашој претпоставци, извести произвољна формула B, то значи да је свака формула доказива у нашем систему, одакле закључујемо да је посматрани систем противречан и у смислу прве дефиниције.

Посветимо и пажњу проблему независности. За једну аксиому неког логичког система кажемо да је независна, ако се, ни та аксиома, као ни њена негација, не могу доказати из осталих аксиома тог система. Када се деси да су све аксиоме неког логичког система независне, тада такав систем називамо независним. Алтернативно, за аксиому A кажемо да је независна од скупа аксиома Γ, уколико се не може доказати ни $\Gamma \vdash A$, ни $\Gamma \cup \{A\} \vdash$.

Интересантно је истаћи да се сваки математички проблем може посматрати као проблем независности, а, историјски, свакако најзначајнији проблем тако формулисан, био је проблем независности *Петог Еуклидовог постулата* међу постулатима презентираним у Еуклидовим *Елементима* који потичу још из далеког IV века пре нове ере. Овај проблем је чекао на решење преко две хиљаде година.

Поред ових, у теорији логичких система, важно место заузимају и особине *потпуности* и *одлучивости* система аксиома, којима овде нећемо поклањати пажњу.

Коначно, читаоцу дугујемо и формулацију једног тврђења које у оваквом контексту повезује и поистовећује импликацију са релацијом дедукције. То је *теорема дедукције*, према којој: $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ акко $\Gamma \vdash A \to B$, што би значило да узрочно последична веза између тврђења A и B може, равноваљано, да се искаже било посредством релације дедукције, било посредством везника импликације.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Боричић: *Елементи теорије система*, Економски факултет, Београд, 1993.

[2] D. M. Gabbay: *Labelled Deductive Systems*, (Vol. I), Clarendon Press, Oxford, 1996.

[3] М. Коен и Е. Нејгел: *Увод у логику и научни метод*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1979. (треће издање)

[4] М. Марјановић: *Обновитељске теме наставе математике*, Настава математике XLV (2000), 1-2, 1–8.

[5] П. Миличић и др: *Математика за I разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1999. (осмо издање)

[6] Е. Нејгел: *Структура науке*, Нолит, Београд, 1974.

[7] A. Pefku, *The first lecture on non-classical logics*, The Teaching of Mathematics IV (2001), 1, 35–40.

[8] М. и С. Прешић, *Увод у математичку логику*, Математички институт САНУ, Београд, 1979.

[9] А. Тарски, *Увод у математичку логику и методологију математике*, Рад, Београд, 1973.