Драгољуб Милошевић

ЈОШ ДВА ДОКАЗА ЈЕДНЕ ТЕОРЕМЕ

У Просветном прегледу[1] дато је шест доказа следећег тврђења:

У правилном осамнаестоуглу важи релација

$$a^3 + R^3 = 3aR^2, \tag{$*$}$$

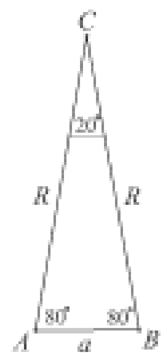
где је a страница и R полупречник описане кружнице око тог многоугла.

Даћемо још два доказа једнакости ($*$).

Доказ 1.

Правилан многоугао са 18 страница може да се разложи на исто толико једнакокраких троуглова основице a, крака R и угла наспрам основице од 20°. На основу косинусне теореме, примењене на један од тих троуглова (нпр. $\triangle ABC$, сл. 1) је $a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 20^\circ$, што је еквивалентно са

$$aR^2(1 + 2\cos 20^\circ) = 3aR^2 - a^3. \tag{1}$$



Сл. 1

Применом синусне теореме на исти троугао добијамо

$$\frac{R}{\sin 80^\circ} = \frac{a}{\sin 20^\circ}. \tag{2}$$

Како је $\sin 80^\circ = 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ = 4\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ и $\cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{1}{4}(2\cos 20^\circ + 1)$, једнакост (2) еквивалентна је са

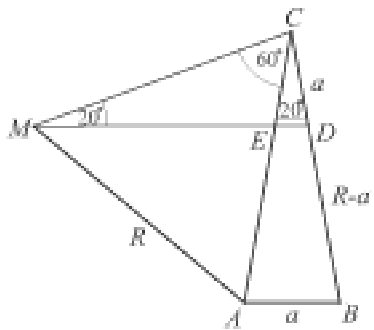
$$R^3 = aR^2(1 + \cos 20^\circ). \tag{3}$$

Једнакости (1) и (3) дају тражену једнакост ($*$).

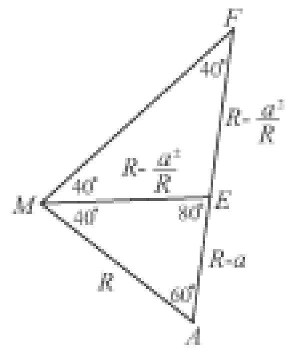
Доказ 2.

Конструишимо троугао CDM подударан троуглу ABC, тако да је $\overline{CD} = \overline{AB} = a$, $D \in \overline{BC}$, сл. 2. У $\triangle ACM$ је $\overline{AC} = \overline{CM} = R$ и $\angle ACM = 60^\circ$, па је тај

[1] Д. М. Милошевић, *Разни докази једне теореме*, Просветни преглед (подлистак Педагошка пракса), бр. 420, децембар 1999.



Сл. 2



Сл. 3

троугао и једнакостраничан. Троуглови ABC и CDE, $\{E\} = AC \cap DM$, слични су. С обзиром на то, имамо $\overline{DE} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{BC}$, односно $\overline{DE} : a = a : R$, тј.

$$\overline{DE} = \frac{a^2}{R}.$$

Због тога је

$$\overline{ME} = \overline{MD} - \overline{DE} = R - \frac{a^2}{R}.$$

Продужимо дуж AE за $\overline{EF} = \overline{EM}$, сл. 3. Троуглови AEM и AFM су слични, па је $\overline{AM} : \overline{AF} = \overline{AE} : \overline{AM}$, тј.

$$R : \left(2R - a - \frac{a^2}{R}\right) = (R - a) : R,$$

што је еквивалентно са $a^3 + R^3 = 3aR^2$.