Мр Маријана Зељић

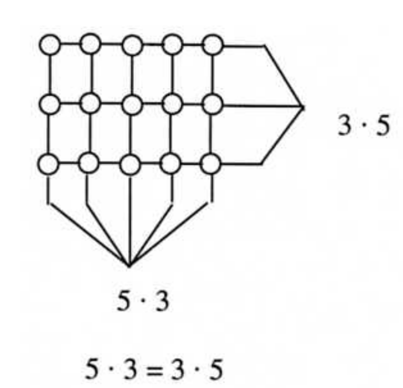
ТРЕТИРАЊЕ АРИТМЕТИЧКИХ ИЗРАЗА У СКУПУ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

Циљ традиционалне наставе аритметике био је развијање практичних вештина рачунања. Таква настава била је исувише окренута учењу чистих рачунских техника на рачун чега је право разумевање изостајало. Савремена концепција наставе аритметике иде, пре свега, у правцу бољег разумевања садржаја, а када је настава о бројевима у питању, то значи истицање основниох правила аритметике и разумевање на њима заснованих рачунских поступака. Начини утемељавања тих правила и видови њиховог изражавања имају своје важно место у савременој настави.

Увођење правила аритметике

У почетној настави обрађује се више правила аритметике која су у почетку деци дата као правила активности, са смислом „можеш поступити на два начина“. Морамо напоменути да у почетној настави нема дедуктивног извођења ових правила једног из других, већ су она одабрана независно једна од других и једини критеријум њихове издвојивости јесте то колико су она оперативна. Скуп реалних бројева поступно сктруктуришемо, почев од почетне наставе, истичући правила са којима радимо, а на вишем нивоу могу се нека правила издвајати као основна, а од ученика тражити извођење осталих. Тада сва правила аритметике видимо као предигру за сва алгебарска својства која ће чинити аксиоме поља реалних бројева и њихове последице.

Често се у нашим, а то се види и у страним уџбеницима, правила аритметике изводе срачунавањем у неколико посебних случајева. Једначењем неколико посебних бројевних израза путем срачунавања њихове бројевне вредности не може се утемељити неко опште правило. Обрада правила аритметике у почетној настави мора бити заснована на интуитивној основи. Правила уводимо полазећи од значења, а затим језички и симболички изражавамо то значење. Тај приступ подразумева коришћење аритметичких израза без стимулуса за њихово срачунавање као, на пример:



Правила аритметике прво изражавамо у процедуралној форми, када ученици од примера до примера активно примењују одређено правило. Постајући свесни правила које примењују, ученици то правило изражавају и реторички (рецимо, „заменом места чинилаца производ се не мења“) и тако развијају и декларативно знање. Касније, на утемељеном разумевању, ученици ће уопштавањем то правило изразити и симболички ($n \cdot m = m \cdot n$).

До пре неколико деценија настава математике била је строго подељена на аритметику (рад са конкретним бројевима) и алгебру (рад са „општим“ бројевима у вишим разредима). Тада рад са општим бројевима није имао основу на којој би био осмишљен, па су операсања таквим бројевима била потпуно формална. Осмишљавање такве наставе треба да тече поступно и растегнуто у времену, па су се зато почеци такве наставе нашли у програмима нижих разреда. Уопштавањем аритметичких закона долазимо до алгебарских. Ако ученици науче аритметичке процедуре са слабим разумевањем правила која леже у основи аритметике, они неће моћи да пређу на алгебарски начин размишљања. Прелаз са аритметичког на алгебарски начин изражавања неће бити могућ без добро осмишљене наставе аритметике. Основношколска аритметика била је оријентисана ка срачунавању, њен фокус није био исказивање релација. У старом аритметичком начину размишљања знак једнакости користио се да се изрази резултат рачунања, док он треба да веже различите изразе са истом бројевном вредношћу.

Анализирајући уџбенике математике за ниже разреде основне школе, уочили смо да се, при обради аритметичких садржаја, неки битни кораци прескачу, што се може приписати непотпуном разумевању теме која се обрађује. Аутори уџбеника више пажње посвећују коришћењу правила при манипулацији симболима, а мање пажње је посвећено основама које подржавају правила и дају значење изразима којима манипулишемо. То ствара неприхватљиво уверење да је меморисање правила оно што је најбитније у учењу алгебре.

Превасходна улога ових правила састоји се у томе да буду видљива основа на којој теку разне аритметичке процедуре. Учење нових појмова заснива се на искуству и знању које ученици већ имају. Механичко учење без разумевања зашто се тако поступа, не пружа ученику могућност да уопштава, идући од онога што је учио ка ономе што касније учи. Ми можемо децу учити појединостима из аритметике, а да при томе не дајемо потребну основу за разумевање. Опишемо активност у виду јасних поступака који могу бити механички научени. Имитирајући наставника, ученици успевају да овладају тим поступцима, али тада ту нема стварног разумевања. Ученици морају да науче да рачунају разумејући основу тих поступака.

На пример, алгоритам множења двоцифреног броја једноцифреним јесте примена правила множења збира бројем. Када правило узимамо као основу за брже рачунање, ученици ће аутоматски изводити операције изостављајући међукораке, као, на пример,

$$7 \cdot (10 + 4) = 70 + 28 = 98.$$

Правило даље видимо као основу поступка писаног множења: производ $7 \cdot 14$ ученици ће рачунати тако што ће број 14 „видети“ као збир $(10 + 4)$ и множење ће се свести опет на сажимање претходно наведеног поступка.

Провођење аритметичких процедура без те видљиве основе води механичком учењу, што је често било присутно у традиционалној настави аритметике. Једно такво механичко провођење процедура посматраћемо кроз третирање садржаја који се односе на редослед рачунских операција.

Питање редоследа рачунских операција

Анализирајући уџбенике и школске програме за математику (нижи разреди основне школе), уочили смо да постоји више наставних јединица под називом „редослед рачунских операција". Први пут такве наставне јединице јављају се у другом, а затим и у трећем и четвртом разреду. Пратећи часове студената Учитељског факултета у Београду, уочили смо да на поменуте садржаје ученици реагују тако што механички срачунавају вредности израза, а поступке рачунања објашњавају тиме што се „операције обављају оним редом којим су записане". Провођење ових процедура тече без разумевања, а обзиром на узраст ученика којима се такве процедуре намећу, друго не можемо ни очекивати.

У уџбенику за трећи разред [4], у лекцији „Редослед рачунских операција" аутори наводе следећи поступак:

„*Ако је у изразу без заграде дато само сабирање и одузимање или само множење и дељење, онда се те операције обављају по реду како су записане.*" Затим следе задаци у којима се од ученика очекује да то примењују.

У уџбенику за четврти разред [5] аутори разрађују даље ову процедуру формалног рачунања на следећи начин:

„*Код израчунавања вредности израза у којем су заступљене операције сабирања и одузимања (њих узимамо као равноправне) редослед операција може се мењати не утичући на промену резултата.*"

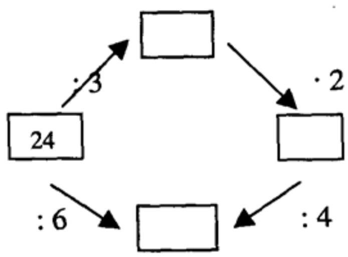
Што се тиче израза у којима су заступљене операције множења и дељења, у истом уџбенику, аутори наводе следеће:

„*Задатак којим би се захтевало да се израчуна вредност израза* $320 : 40 \cdot 2$ *није коректан, јер, с обзиром на то да су ове операције равноправне, могли бисмо прво помножити, односно делити, а при томе бисмо добили различите резултате.*"

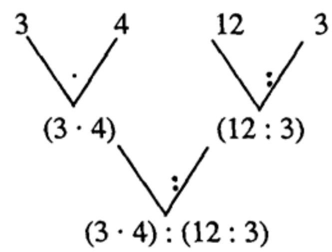
Наведено излагање садржаја у уџбеницима за трећи и четврти разред делује збуњујуће и за нас, а можемо замислити како збуњујуће делује на ученике. Оваквом обрадом аутори су обесмислили ове садржаје. Примећујемо да у трећем разреду аутори дозвољавају изостављање заграда у изразима, као на пример $425 - 160 + 81$ или $360 : 9 \cdot 2$, и наглашавају да се операције изводе оним редоследом којим су записане. Такво „рачунање" нема никакву логички прихватљиву основу, нити правило о извођењу операција написаним редоследом постоји као општеприхватљиво. Бесмислена је претпоставка да наведене конвенције могу бити јасне водиље за усвајање ових аритметичких садржаја. Тим путем наставу аритметике сводимо на дрил и механичко учење. Још горе је то што аутори овим конвенцијама намећу да је са компонентама, нпр. a, b, c, d, једино важно рачунати вредност израза:

$$((a : b) : c) : d = a : b : c : d \qquad \text{(по „конвенцији аутора“)},$$

а не и свих оних које настају померањем заграда у друге положаје. Померањем заграда у друге положаје добија се низ израза са различитим бројевним вредностима, који су једнако значајни као и овај који је предмет овог немотивисаног дрила. Ако бисмо сматрали корисним вежбе срачунавања, уместо наметања оваквих конвенција, прихватљивије је користити „дидактичке машине“, као на пример на слици 2.



Сл. 2



Сл. 3

Додатно је збуњујуће то што у уџбенику за четврти разред аутори наводе потпуно супротне конвенције од оних које су наведене у трећем разреду, по којима се при срачунавању израза у којима фигуришу операције сабирања и одузимања (нпр. $425 - 160 + 81$) редослед операција може мењати не утичући на промену резултата, док је притом, нпр, израз $360 : 9 \cdot 2$ бесмислен. Овакве интерпретације садржаја могу се једино приписати неразумевању теме која се обрађује.

У циљу отклањања наведених грешака, даћемо анализу и разјашњење ових аритметичких садржаја.

Да би састављање израза било логички осмишљено, односно поступак рачунања једнозначно изводљив, прво се прихвата опште правило да се сваки израз пише у загради. Инсистирање на писању заграда јесте култивисање детета да правилно рачуна од самог почетка. Користећи заграде ми прецизно и једнозначно изражавамо структуру аритметичког израза. У сваком изразу који је правилно написан јасно се истичу две компоненте. Узмимо, на пример, израз $(3 \cdot 4) : (12 : 3)$. Овако записан израз једнозначно је одређен, а истицање његових компоненти илустроваћемо користећи дрво израза, сл. 3.

У наведеном изразу јасно се истичу две компоненте: дељеник (производ бројева 3 и 4) и делилац (количник бројева 12 и 3). У оваквим случајевима заграде треба писати, јер оне прецизно одређују дати аритметички израз.

Израз $((a + b) + c) + d$ имаће исту вредност као и израз $a + ((b + c) + d)$, тј. имаће исту вредност без обзира на то како су заграде постављене. И израз $((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$ имаће исту вредност као и израз $a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)$, тј. имаће исту вредност без обзира на то како су заграде постављене. Операције сабирања и множења задовољавају асоцијативни закон и ако различито здружујемо сабирке (чиниоце), вредност израза се не мења. У тим случајевима можемо прихватити изостављање заграда и писати изразе: $a+b+c+d$ и $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Посматрајмо сада израз $a : b : c \cdot d$. Овај израз ништа нам не значи, тј. није једнозначно одређен. Вредност израза зависи од начина постављања заграда. На пример,

$$
\begin{aligned}
(a : b) : (c \cdot d) &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c \cdot d} = \frac{a}{b \cdot c \cdot d},\\
((a : b) : c) \cdot d &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot d = \frac{a \cdot d}{b \cdot c},\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

С обзиром на то да се вредност израза мења у зависности од промене распореда заграда, не може се прихватити никаква конвенција о изостављању заграда, а која би имала своју осмишљену функцију.

Проанализирајмо израз $a-b-c+d$. У скупу целих бројева одузимање се дефинише као додавање супротног елемента, тј. $a-b=a+(-b)$. Тада прихватамо „конвенцију о збиру“, тј. изостављање заграда које стоје уз сабирање супротних елемената, па можемо писати, на пример, $a+(-b)+(-c) = a-b-c$. Без подразумевања „конвенције о збиру“ наведени израз $a-b-c+d$ нема смисла. Његова вредност зависи од начина постављања заграда. На пример,

$$
\begin{aligned}
&(a-b)-(c+d) && (a-(b-c))+d\\
&\qquad = (a+(-b))-(c+d) && \qquad = a+(-b)+c+d\\
&\qquad = a+(-b)+(-c)+(-d) && \qquad = a-b+c+d,\\
&\qquad = a-b-c-d, && \qquad \ldots
\end{aligned}
$$

Очигледно је да израз $a-b-c+d$ нема смисла везивати за изразе који настају помоћу сабирања и одузимања са компонентама a, b, c, d. Овај израз једнозначно се схвата само као $a+(-b)+(-c)+d$. Ова једнозначност не доводи се у везу са редоследом записивања рачунских операција („*операције рачунамо оним редом којим су записане*“). И у скупу целих бројева за операцију сабирања важе комутативни и асоцијативни закон, па важе и једнакости:

$$a+(-b)+(-c)+d = a+(-c)+d+(-b) = d+(-c)+a+(-b) = \cdots$$

Једнакост ових израза заснива се на „конвенцији о збиру“ и не постоји слобода произвољног постављања заграда. На пример,

$$
\begin{gathered}
12-3-4 \neq 12-(3-4),\\
12+(-3)+(-4) = 12+((-3)+(-4)).
\end{gathered}
$$

Наведени поступци имају смисла онда када су системи бројева толико проширени, да су ове операције у њима увек изводљиве, тј. у скупу целих бројева $\mathbf{Z}$ одузимање, а у скупу рационалних бројева $\mathbf{Q}$ још и множење. У нижим разредима основне школе, где се оперише у систему природних бројева $\mathbf{N}$, „ослобађање од заграда" треба везати само за разумне оквире у којима се производ или количник јављају као компоненте у збиру или разлици.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kieran, C., *The learning and teaching of school algebra*, In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 390–419, Macmillan, New York, 1992.

[2] Marjanović, M., *A broader way through themas of elementary school mathematics, IV*, The Teaching of Mathematics, V, 1 (2002), 47–55.

[3] Skemp, R. R., *The Psychology of Learning Mathematics* (expanded American ed.), Lawrence Erlbaum, Hillsdate, New Jersey, 1987.

[4] Сотировић, В, Липовац, Д, Латковић, М, *Математика за 3. разред*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.

[5] Сотировић, В, Липовац, Д, Латковић, М, *Математика за 4. разред*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.

[6] Freudenthal, H., *Mathematics and Educational Task*, D. Reidel Publ. Co., Dordecht, 1973.