Никола Александров

КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

Час обраде у II разреду Гимназије у Босилеграду

1. Уводни део часа

Проверавамо домаће задатке. Подсећамо се да синусна теорема даје зависност између страница и углова троугла. Помоћу синусне теорема „решавамо троугао" у два случаја:

а) када су дата два угла и једна страница,

б) када су дате две странице и угао наспрам једне од њих.

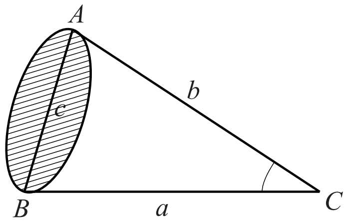
Истичемо циљ: упознаћемо још једну значајну теорему – **косинусну теорему** која даје везу између страница троугла и једног његовог угла.

2. Главни део часа

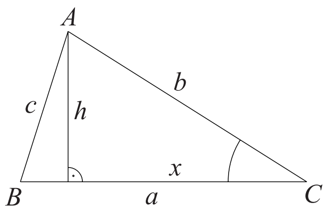
Да бисмо створили проблемску ситуацију постављамо следећи практични задатак.

При пројектовању железничке пруге увидело се да би требало између места A и B пробити тунел. Одредити дужину тунела ако се места A и B виде из места C, а мерењем је добијено: $BC = 675{,}3\,\mathrm{m}$, $AC = 548{,}8\,\mathrm{m}$ и $\angle ACB = 58°54'$.

Нацртали смо на табли слику (сл. 1). Очигледно, задатак се своди на „решавање троугла" ако су дате две странице a и b и угао γ између њих. Треба одредити трећу страницу c.



Сл. 1



Сл. 2

Ученици су покушали да примене синусну теорему, али она није дала решење јер је ово за нас нови случај. Ученицима је постало јасно да се јавља недостатак знања потребног за решавање постављеног задатка.

Нацртали смо произвољан троыгао ABC (сл. 2) сагласно ознакама на сл. 1. Хтели смо да утврдимо која релација постоји између странице c и угла γ и страница a и b. То је за нас сада проблем. (Слику 2 и даља извођења на табли обавља један ученик уз помоћ професора.)

Нека је дуж $AD = h$ висина из темена A и нека је $DC = x$. На основу Питагорине теореме из правоуглих троуглова ADC и ABD добијамо:

$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{и} \quad h^2 = c^2 - (a-x)^2.$$

Елиминацијом h^2 из ових двеју релација добија се $c^2 - (a-x)^2 = b^2 - x^2$, односно

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax. \tag{$*$}$$

Из правоуглог троугла ADC налазимо да је $x = b\cos\gamma$ и замењујемо то у већ изведену једнакост $(*)$, те добијамо релацију

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \tag{1}$$

чиме смо проблем решили. То је, у ствари, формула косинусне теореме.

Ученици нису имали стрпљења и одмах су приступили решавању задатка постављеног на почетку часа. Замењујући дате вредности у релацији (1) добили су, уз помоћ џепног калкулатора, коначан резултат. Ток рада је изгледао овако:

$$\begin{aligned} c^2 &= 675{,}3^2 + 548{,}8^2 - 2\cdot 675{,}3\cdot 548{,}8\cdot\cos 58^\circ 54' \\ &\approx 456030.09 + 301181{,}44 + 741209{,}28\cdot 0{,}516533 \\ &= 374352{,}23, \end{aligned}$$

$c \approx 611{,}8\,\mathrm{m}$, што је тражена дужина тунела.

Наставили смо даље и ученици су уочили да се, цикличном заменом, косиусна теорема може написати и за странице a и b:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \tag{2}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta. \tag{3}$$

Формуле (1), (2) и (3) важе за било који троугао.

Речима, косинусна теорема може се исказати овако (исказују ученици уз помоћ професора):

У сваком троуглу је квадрат дужине било које странице једнак збиру квадрата дужина осталих двеју страница умањеном за двоструки производ дужина тих страница и косинуса угла између њих.

Непосредно се види: ако је $\gamma = \pi/2$, онда релација (1) представља Питагорину теорему, тј. $c^2 = a^2 + b^2$.

Формула (1) важи и у случају када је троугао ABC тупоугкли, што се једноставно може проверити.

Формулу $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ можемо запамтити овако: ако је c хипотенуза правоуглог троугла, имамо да је $c^2 = a^2 + b^2$. Ако није, онда од $a^2 + b^2$ треба одузети производ $2ab$ са косинусом угла који је насупрот страници c – тиме у случају оштроуглог троугла тај збир квадрата умањујемо, а у случају тупоуглог повећавамо.

Још једном смо констатовали да се косинусном теоремом „решава“ косоугли троугао ако су познате две странице и угао између њих. Поред тога, косинусна теорема примењује се у „решавању троугла“ и када су познате све три странице троугла. Решавањем формула (1), (2) и (3) по косинусима одговарајућих углова, добијају се релације:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (4), \qquad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad (5),$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad (6),$$

одакле се одређују α, β и γ, с тим да је довољно наћи два угла док се трећи налази из везе $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$.

Друга могућност је да се α одреди из релације (4), да се затим β нађе помоћу синусне теореме и најзад одреди γ као $180^\circ - (\alpha+\beta)$.

3. Завршни део часа

Да бисмо проверили разумевање косинусне теореме и њене примене, решавамо следеће примере.

Пример 1. Израчунати углове отругла чије су странице $a = 8$, $b = 3$ и $c = 7$.

Решење. На основу формуле (6) добија се

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{64+9-49}{2\cdot 8\cdot 3} = \frac{1}{2},$$

одакле је $\gamma = 60^\circ$. На основу формуле (4) је

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+49-64}{2\cdot 7\cdot 3} = -\frac{1}{7} = -0{,}14286,$$

одакле је $\alpha = 98^\circ 13'$. Трећи угао је $\beta = 180^\circ - (\alpha+\gamma) = 180^\circ - 158^\circ 13' = 21^\circ 47'$.

Пример 2. Наћи трећу страницу троугла, без употребе калкулатора или било ког другог помагала, ако је познато: $a = 7$, $b = 13$, $\beta = 60^\circ$.

Решење. Косинусна теорема за страницу b гласи: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Заменом датих вредности добија се једначина $c^2 - 7c - 120 = 0$ чија су решења $c_1 = 15$ и $c_2 = -8$. Друго решење не долази у обзир јер је дужина странице позитиван број.

Домаћи задатак.

1. „Реши троугао“ ако је познато:

(i) $a = 28$, $c = 42$, $\beta = 124^\circ$; (ii) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

2. Без употребе џепног рачунара одредити странице троугла ABC ако је $a - b = 5$, $c = 7$, $\gamma = 60^\circ$.

3. Странице троугла односе се као 5 : 7 : 8. Колики је средњи (по величини) угао тог троугла?