Др Владимир Мићић

АЛГЕБАРСКИ САДРЖАЈИ У ПЕТОМ РАЗРЕДУ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ (I)

Чланак је компонован од фрагмената нашег приручника за наставнике[1]. Односи се на обраду садржаја из двеју наставних тема: Скупови и Дељивост бројева.

Увод

Ученици петог разреда су узраста од 11 до 12 година. Према познатој, и средином двадесетог века широко прихваћеној, Пијажевовој[2] периодизацији развоја математичког мишљења, они би се налазили на прелазу из периода конкретних операција (7–11 година) у период формалних операција (од 12 година). Буран развој човечанства током друге половине двадесетог века, пре свега у области технологија (телевизија, рачунарске технике, нови видови комуникација, ...) допринео је убрзаном сазревању деце и, несумњиво, померио границе тих периода према млађим узрастима. Зато се може основано тврдити да је поменути прелаз „спуштен" међу ученике четвртог разреда, и да су ученици петог разреда способни да врше формалне операције. Деца су већ овладала конкретним операцијама и у стању су да изводе неке закључке на основу претпоставки. При томе се постепено ослобађају ранијих навика да се, обавезно, ослањају искључиво на опажања и стечено искуство, иако је у почетним корацима, али и надаље, пожељно да се и таквим активностима поткрепи свако ново тврђење. Бројни примери као подстицај за наслућивање неке истине и као илустрација за њене „домете", неизоставни су део добро оствареног поступка учења у том узрасту.

Пишући уџбеник настојали смо да у њега уградимо, у мери у којој нам је то омогућавао расположиви простор, наше виђење могуће реализације тих захтева у наставном процесу. У овом приручнику ћемо указати на посебности појединих наставних тема и понудити нека решења за њихово остваривање. Настојали смо да односне садржаје употпунимо неким теоријским и практичним активностима које би, поред додатног осветљавања проблема и његовог смештања у неки шири амбијент, послужиле и томе да читаоца подстакну на самостално трагање за

[1] Владимир Мићић, Вера Јоцковић, *Приручник уз уџбеник математике за пети разред основне школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2004, 84 стр.

[2] Jean Piaget, 1896–1980, швајцарски психолог, један од најзначајнијих психолога XX века. Својим радовима је подстакао и психологе и математичаре да се заинтересују за психологију учења математике.

бољим решењима и освеже му нека, можда заборављена или запостављена, знања, у вези са садржајима који се обрађују.

Као што знамо, програмом је предвиђено да се у оквиру предмета Математика у петом разреду обраде садржаји из следећих шест наставних целина (тема): 1. Скупови; 2. Скупови тачака; 3. Угао; 4. Дељивост бројева; 5. Разломци; 6. Осна симетрија. Док друга, трећа и шеста тема обухватају геометријске садржаје, у првој, четвртој и петој теми разматрани су почетни појмови теорије скупова, скупови $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}_0$), $\mathbf{Q}_0^+$, релације и операције у њима. Ове последње називамо алгебарским садржајима.

Настојали смо да кроз обраду алгебарских садржаја у потпуности следимо пут од подстицаја (спољњег и унутрашњег) за увођење неког појма, преко његове обраде до могућности примене у математици или у практичном жвивоту. При томе смо покушали (да ли и успели?) да у потпуности уважимо поменуте карактеристике ученика петог разреда и степен њиховог менталног развоја.

Програмом предвиђени алгебарски садржаји су, уз мање изузетке, традиционално присустни у основношколској настави математике. У оквиру њих се рачуна, мери, упоређује и ученици их, по правилу, доживљавају као неопходно и корисно помоћно средство за свакодневни живот, али и, уз нашу помоћ, као основу за даље успешно бављење математиком и другим школским садржајима. Ти им се садржаји чине лакшим од геометријских. Иако знамо да је појам броја апстрактан, ученици га не доживљавају тако. Наиме, они су га кроз богато опажајно искуство већ „ускладиштили“ у свој ментални свет, а кроз претходна четири разреда стекли и одређене вештине и навике за бављење њима. И проширивање „света бројева“, што је у значајној мери заступљено, они доживљавају као природан след активности и прихватају га без тешкоћа. Стога смо се определили да управо овде, где су им објекти с којима раде блиски, учинимо неколико покушаја доказивања својстава тих, њима блиских објеката. Наставник ће осетити да ли нека од понуђених аргументација „пролази“ у конкретном одељењу. Настојали смо да примери који претходе неком доказу, својим садржајем и начином обраде, могу послужити као довољна потпора обрађиваном својству, у случају да нема доказ.

Значајно је приликом обраде алгебарских садржаја наглашавати да, по правилу, морамо знати „шта радимо, како радимо и зашто тако радимо“. Најчешће ученици знају како се рачуна, али многи од њих не знају шта рачунају, док тек понеки од њих зна и зашто тако рачуна. Ту је улога наставника веома значајна.

1. Скупови

У свакодневном животу честе су ситуације у којима се, на основу неких заједничких својстава или неких договора, издваја група објеката (у широком смислу те речи, конкретних или апстрактних). Ради комуницирања често настојимо или смо принуђени да одређеној групи објеката дамо име. Тако говоримо о стаду оваца, стаду коза, јату риба, јату птица, екипи одбојкаша, екипи ватерполиста, одељењу ученика, одељењу војника, ... , али и о кутији школских креда, кутији шибица, свежњу кључева, свежњу новчаница, нарамку дрва, букету цвећа, гомили камења, ... Поред оваквих група конкретних објеката можемо посматрати и групе апстрактних објеката; у математици посматрамо, на пример, бројеве прве десетице, темена датог квадрата, геометријско место тачака у равни које су једнако удаљене од двеју задатих тачака те равни, ...

Међу посматарним објектима налазе се бића, предмети, тачке, бројеви, ... Спонтано нам се намеће потреба за неких општијим појмом, који би се могао користити за именовање издвојених група објеката, без обзира на то каква је њихова природа. Тако долазимо до појма скупа.

Појам скупа је основни појам у математици, а њих, као што знамо, не дефинишемо. Кроз подесне примере, сличне наведеном, али и примере који ће ученицима бити ближи и јаснији, настојимо да код њих изградимо свест о потреби увођења општег, апстрактног појма.

Иако ово није први пут да се срећу са појмом скупа, сматрали смо да су њихова претходно стечена знања на нивоу опажањем усвојених знања. Ове садржаје они су први пут примали када су били у тзв. периоду конкретних операција (у узрасту од 7 до 10 година) и нису били дорасли за активно усвајање апстрактних појмова и садржаја.

Подсетимо се да је скуп S задат ако за произвољан објекат (елемент) x важи: или $x \in S$ или $x \notin S$. То значи да се може одговорити, потврдно или одречно, на питање да ли објекат x припада S. Можемо ли и умемо ли одговорити? Настојимо да примери у пракси буду тако изабрани да не доводе ученике у недоумице. Али, ми знамо да то није увек случај. Подсетимо се једног класичног примера.

Берберин b је становник села S. Он брије све оне и само оне становнике села који се брију, а не брију се сами. Да ли се он брије сам или не? Ако се брије сам, онда он не брије себе (јер брије само оне који се не брију сами!). Ако се не брије сам, онда он брије себе (јер брије све оне који се не брију сами!). У оба случаја долазимо до контрадикције.

Ако у овом примеру са B означимо део (зашто не скуп?) становника села S, оних које брије b, видимо да B није задат скуп јер за елемент b не знамо одговор на питање да ли $b \in B$ или $b \notin B$.

Ово је „фолклорна“ варијанта једног од парадокса теорије скупова, али се ми овде тиме нећемо бавити.

У одређеној ситуацији скупови којима се бавимо су подскупови неког скупа U. У првом и другом разреду смо посматрали подскупове скупа бројева прве десетице или подскупове скупа бројева прве стотине. У четвртом разреду ученици су упознали структуре $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_0$, па су посматрани скупови били подскупови скупа $\mathbf{N}$ (или $\mathbf{N}_0$). У том контексту се $\mathbf{N}$ јавља у функцији издвојеног (и назначеног) *универзалног скупа.* Будући да је настава математике у почетку петог разреда посвећена и систематском прегледу структура $\mathbf{N}$ (и $\mathbf{N}_0$), налазићемо се у том свету бројева и природно је да сви посматрани скупови бројева буду и даље подскупови унивезралног скупа $\mathbf{N}_0$ (или $\mathbf{N}$). Поред њих посматраћемо и неке друге примере скупова, повезаних најчешће са свакодневним животом и нашим реалним окружењем. У таквим случајевима на природан начин се издваја универзални скуп. Тако ће, у примерима који се односе на слова азбуке, универзални скуп бити управо скуп $U = A = \{$а,б,в,г, … ,ч,џ,ш$\}$ свих слова азбуке.

На тај начин у наставној пракси изграђујемо навику да, без експлицитног указивања на то, скупове A, B, C, … , S, T, … , између којих успостављамо односе ($\subset$, $\supset$, $=$) или њима оперишемо (налазимо пресеке, уније, разлике), сматрамо подскуповима одређеног универзалног скупа U. Тај ће се скуп мењати зависно од природе елемената које посматрамо. Потом, када „освојимо свет разломака“, скуп U ће бити скуп $\mathbf{Q}_0^+$.

Приликом обраде ових садржаја није на одмет нагласити да делови елемената неког скупа нису елементи тог скупа. Ако посматрамо скуп A аутомобила који су паркирани испред једне зграде, онда леви предњи точак једног од тих аутомобила али и ниједан други точак тих аутомобила, није елемент скупа A. Точак није аутомобил. Елементе скупа увек посматрамо као целовите објекте. Из тих разлога ни цифра 1 није елемент скупа

$$T = \{11, 111, 1111\},$$

иако је коришћена за записивање његових елемената.

Задавање

Користећи се нашим уџбеником приликом обраде овог садржаја уочићете да смо настојали да нагласак буде на појму „издвајача“ – својства (својстава) елемената неког скупа. При томе смо покушали да, не уводећи појам универзалног скупа, укажемо путем примера да је увек присутан и неки други, шири скуп, из којег се врши то издвајање. Да ово не би „звучало“ формално, важно је истаћи да се све одвија у неком природном окружењу, при чему природним сматрамо и окружења која су креирана током наставе, пре свега наставе математике. За скуп цветова то могу да буду цветови на ливади или цветови у цвећари. За скуп парних бројева прве десетице то може да буде скуп бројева прве десетице, али и скуп бројева прве стотине или скуп природних бројева.

Предлажемо да се нарочита пажња посвети реченицама типа:

„S је скуп свих оних елемената скупа A за које важи својство s“, односно њиховом запису у облику

$$S = \{\, x \in A \mid x \text{ има својство } s \,\}.$$

Венов дијаграм

Ми знамо да за $A, B \subset U$ дефинишемо

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\, x \in U \mid x \in A \text{ и } x \in B \,\}, \\ A \cup B &= \{\, x \in U \mid x \in A \text{ или } x \in B \,\}, \\ A \setminus B &= \{\, x \in U \mid x \in A \text{ и } x \notin B \,\}, \end{aligned}$$

при чему је x произвољан елемент универзалног скупа U. Ипак, чини нам се да би овакви записи оптеретили наставу, а њима дефинисани пресек, унија и разлика скупова не би се учинили блиским и разумљивим ученицима петог разреда. Стога смо се определили за описне дефиниције у којима користимо симболику која је за теорију скупова мање специфична.

Поред тога, деца тог узраста су навикнута да се ослањају на своја чула. За њих је свако сазнање које је додатно поткрепљено неким опажајем боље утемељено. Стога смо се определили за наглашено коришћење Венових дијаграма. Њима се скупови *представљају* (ту је важно нагласити да то нису они сами већ њихове представе, прикази) на сликовит начин. Тиме се у процес сазнавања укључује чуло вида, он (процес) бива додатно подржан, а ми изводимо и прихватамо закључке засноване на поступку „читања са слике“. То је, наравно, осетљиво место и морамо га подржати са више примера. Програмом није предвиђено да се систематски обрађују закони (правила) који важе за скуповне операције, али нас то не спречава да урадимо и такве примере (без увођења назива).

Битно је ограничити се на једноставне примере са једним, два, а само изузетно три скупа „учесника“ у сложенијим изразима. Ипак, то су први кораци у освајању ових апстрактних садржаја.

Природни бројеви

На два својства структуре $(\mathbf{N}_0, +, \cdot, <)$ ослањамо се у настави. У поглављу 4.3 су у нешто модификованом облику. Та су својства ученицима блиска и они у њих не сумњају. Стога се у настави на њих позивамо тек овлаш, истичући како: „знамо да ... “, „будући да ... “ и сл. У формалном заснивању система природних бројева $\mathbf{N}$ (или $\mathbf{N}_0$), базираном, на пример, на Пеановој аксиоматици, то су познате теореме.

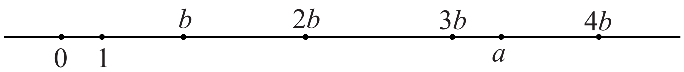
Ако оценимо да је одељење спремно за нешто формалнији приступ садржајима, можемо наставу обогатити и овим својствима скупа $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}_0$).

Знамо да важи:

A1. Сваки непразан подскуп скупа природних бројева садржи свој најмањи елемент. Тај је елемент одређен, јединствен природан број.

A2. За свака два природна броја a и b постоји природан број c, такав да је $a < b \cdot c$ (Архимедово својство).

Јасно је да оваква два својства важе и у $\mathbf{N}_0$, при чему у другом од њих може бити $a \in \mathbf{N}_0$, али мора бити $b \in \mathbf{N}$, а закључујемо да постоји $c \in \mathbf{N}_0$ са наведеним својством.



Могуће сумње или неповерење можемо отклонити, или предупредити, помоћу неколико примера. При томе, као и у свим приликама када примерима подржавамо неко својство или правило за које смо уверени, или смо се кроз искуство уверили, да је ученицима блиско, број таквих примера треба да буде мали, тек симболичан. Велики број примера би могао да буде контрапродуктиван, да провоцира сумњу и неповерење, што нам није био циљ. Ако се определимо за овакав приступ, настојаћемо да Архимедово својство обавезно илуструјемо на бројевној полуправој. То ће ученици доживети и као малу игру, нарочито ако се излагање поткрепи реченицама типа „$b \cdot c$ ће престићи a“ и сл.

Иако се појмови променљиве, функције, зависности, ... , јављају касније у настави математике, односно тек у седмом и осмом разреду, ученици из млађих разреда долазе у пети разред са већ изграђеним осећајем за промену збира, разлике, производа и количника у зависности од промене „учесника“. Стога и на овоме месту тај осећај треба подстицати, бар кроз подесне примере и задатке. Имајући у виду да се овде, у суштини, ради о вредностима функција двеју променљивих, предлажемо (па и инсистирамо на томе) да се обавезно један од „учесника“ фиксира. Деца ће, на том узрасту, ретко бити у стању да, с разумевањем, прате промену резултата операције у случајевима када се оба „учесника“ мењају. Лако је, на пример, закључити да ће се производ повећати ако се оба чиниоца повећају. Али, шта ако се један од чинилаца повећа а други смањи?

Променљива. Израз

До петог разреда ученици су већ стекли одређена искуства у коришћењу слова за означавање неких одређених математичких (и не само математичких) објеката, али и за означавање произвољног елемента неког скупа. Они већ знају да у реченици

$$„x \in D, \quad D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}“$$

слово x означава било који од елемената скупа D, што у овом случају значи да x означава било који од бројева прве десетице. Тиме је слово x проглашено *променљивом* чији је домен, скуп из којег може узимати вредности, скуп D. У општем случају ће бити непримерено говорити о вредностима, па ћемо се користити неком другом реченицом, на пример: „ ... пролази кроз скуп ... “. На тај начин слово у улози променљиве означава произвољан елемент одређеног скупа. Стога слово, само по себи, није променљива (оно је само ортографски знак); слово је променљива ако је задат скуп чији произвољан елемент оно означава. Ако је тај скуп једночлан, слово означава тај један елемент скупа, и говоримо о *константи*.

Променљива је *бројевна* ако је скуп, чији произвољан елемент она означава, неки скуп бројева. Бројевна константа је, у ствари, један одређен број. Уобичајено је њих означавати стандардним ознакама. Стога ћемо се користити ознаком 2 уместо $x \in S$, $S = \{2\}$.

Наши ће бројеви бити из $\mathbf{N}_0$ а бројевне променљиве означаваће произвољне елементе скупа $\mathbf{N}_0$ или неког његовог подскупа. Помоћу таквих бројева, бројевних променљивих и операција у $\mathbf{N}_0$ формираћемо *изразе*. Ученицима који су тек кренули у пети разред, наводићемо примерене *бројевне изразе* (на пример $3 \cdot 7 + 4$, $12 : 3 - 3$) и бројевне изразе с променљивом (на пример, $5 - 2x$, $7x + 3$, $x \in \mathbf{N}_0$), и налажењем вредности таквих израза за поједине вредности променљиве или, помоћу табеле, за више вредности променљиве, дозволићемо себи да се подсетимо општег појма бројевног израза и неких, уз њега повезаних појмова.

Претпоставимо да се налазимо у „свету бројева“ S. То је на крају првог разреда скуп $S = \mathbf{N}_{100} = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, ... , на крају четвртог и почетку петог разреда $S = \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. На крају петог разредаа то ће бити скуп $S = \mathbf{Q}_0^+$ ненегативних рационалних бројева, на крају шестог разреда $S = \mathbf{Q}$, да би на крају седмог разреда то био скуп $S = \mathbf{R}$.

Свака константа и свака променљива су изрази. Ако су I и J изрази, онда су $I+J$, $I-J$, $I \cdot J$, $\dfrac{I}{J}$ изрази. Ако је $f(t)$ функција а I израз, онда је $f(I)$ израз.

На тај начин налазимо да су за $x, y \in \mathbf{N}_0$ (у ствари за $x, y \in S$, где је S било који од скупова бројева),

$$\begin{gathered} 2+3\cdot 4, \quad 1+2\cdot x, \quad 12-3x, \quad \frac{12}{1+x}, \\ x^2-3x+1, \quad \frac{2+y}{x-y}, \quad \frac{x}{(x-2)(x-3)} \end{gathered}$$

изрази. Док први од њих не садржи променљиву (променљиве) и представља број 14, записан на други начин, остали изрази садрже променљиву (променљиве). Избором вредности (из $\mathbf{N}_0$) за x, односно за x и y, добићемо бројевне изразе. Они ће, по правилу, представљати неке бројеве, кажемо и вредности израза за изабране вредности променљивих. Нека је, на пример, $a(x)$ ознака за израз $1+2\cdot x$, што записујемо као

$$a(x) := 1 + 2\cdot x.$$

Онда је $a(3) = 1+2\cdot 3 = 7$. Кажемо да израз $a(x)$ узима вредност 7 ако променљива x узме вредност 3. Будући да је број 7 елемент (одређени објекат) сваког од наведених „светова бројева“, израз $1 + 2 \cdot x$ је дефинисан за $x = 3$, што можемо исказати и реченицом „број 3 припада домену дефинисаности D_a израза $a(x)$“. Међутим, није увек тако.

У „свету бројева“ S домен дефинисаности D_b бројевног израза $b(x)$, с променљивом $x \in X \subset S$ је скуп свих оних елемената скупа X за које $b(x)$ представља одређени елемент из S (вредност озраза $b(x)$ је број из S). Дакле,

$$D_b = \{\, x \in S \mid b(x) \in S \,\}$$

одакле „видимо“ да је $D_b \subset X$ (то је скуп елемената из X који имају неко својство).

На почетку петог разреда било је $S = \mathbf{N}_0$. Нека је и $X = \mathbf{N}_0$ (што доживљавамо природним, јер не сужавамо скуп из којег променљива узима вредности).

Посматрајмо израз $c(x) := 12 - 3x$, $x \in \mathbf{N}_0$. За свако $x \in \mathbf{N}_0$ ће $c(x)$ бити бројевни израз. За $x = 2$ то је $12 - 3 \cdot 2$, за $x = 7$ то је $12 - 3 \cdot 7$. Потражимо домен дефинисаности израза $c(x)$. Имамо

$$D_c = \{\, x \in \mathbf{N}_0 \mid c(x) \in \mathbf{N}_0 \,\} = \{\, x \in \mathbf{N}_0 \mid 12 - 3x \in \mathbf{N}_0 \,\}.$$

Уочавамо да је $c(0) = 12 \in \mathbf{N}_0$, $c(1) = 9 \in \mathbf{N}_0$, $c(2) = 6 \in \mathbf{N}_0$, $c(3) = 3 \in \mathbf{N}_0$, $c(4) = 0 \in \mathbf{N}_0$ и да за све $x \in \{5, 6, 7, \dots\}$ важи $c(x) \notin \mathbf{N}_0$. Стога је

$$D_c = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Верујемо да је следећи пример исто толико занимљив. Посматрамо израз $d(x) := \dfrac{12}{1+x}$, $x \in \mathbf{N}_0$. Нагласимо поново да смо на почетку петог разреда и да је $S = \mathbf{N}_0$. За свако $x \in \mathbf{N}_0$ је $d(x)$ бројевни израз. За $x = 1$ то је $\dfrac{12}{1+1}$, за $x = 10$ то је $\dfrac{12}{1+10}$. Тражимо домен дефинисаности израза $d(x)$. Налазимо

$$D_d = \{\, x \in \mathbf{N}_0 \mid d(x) \in \mathbf{N}_0 \,\} = \left\{ x \in \mathbf{N}_0 \;\middle|\; \frac{12}{1+x} \in \mathbf{N}_0 \right\},$$

па имамо да је $d(0) = 12 \in \mathbf{N}_0$, $d(1) = 6 \in \mathbf{N}_0$, $d(2) = 4 \in \mathbf{N}_0$, $d(3) = 3 \in \mathbf{N}_0$, $d(4) = \dfrac{12}{5} \notin \mathbf{N}_0$, $d(5) = 2 \in \mathbf{N}_0$, $d(6) = \dfrac{12}{7} \notin \mathbf{N}_0$, $d(7) = \dfrac{12}{8} \notin \mathbf{N}_0$, $d(8) = \dfrac{12}{9} \notin \mathbf{N}_0$, $d(9) = \dfrac{12}{10} \notin \mathbf{N}_0$, $d(10) = \dfrac{12}{11} \notin \mathbf{N}_0$, $d(11) = 1 \in \mathbf{N}_0$ и да за све $x \in \{12, 13, \dots\}$ важи $d(x) \notin \mathbf{N}_0$. Стога је

$$D_d = \{0, 1, 2, 3, 5, 11\}.$$

Овај бисмо задатак, вероватно, решавали нешто другачије када упознамо релацију дељивости и научимо како се налазе сви делиоци броја 12. Међутим, на крају петог разреда имали бисмо промењену ситуацију. Тада би било $S = \mathbf{Q}_0^+$, па може бити и $X = \mathbf{Q}_0^+$. Својства структуре $(Q_0^+, +, \cdot, <)$ би нам тада дала да је $D_d = \mathbf{Q}_0^+$. Претходни пример (са $c(x)$), међутим, мора сачекати шести разред.

Користећи се таблицом вредности бројевног израза с промењљивом стичемо представу о понашању вредности таквог израза, о промени његових вредности, растењу и опадању и на тај начин чинимо прве кораке према појму функције. При томе се, ако нам се учини да одељење то може, не треба се устручавати да се ученицима понуди и неки пример у којем ће домен дефинисаности бити прави подскуп скупа $\mathbf{N}_0$ (или $\mathbf{N}$). То би могло изгледати и овако:

x	0	1	2	3	4	5	6	...
$2x-7$	–	–	–	–	1	3	5	...

Правила налажења чланова низа

Ученици ће, можда, имати тешкоћа са одређивањем неког од правила налажења члана низа на n-томе месту ако је задато првих неколико чланова. То је разумљиво јер подразумева, прећутно, да се правило које се може наслутити на основу задатих чланова поштује и даље. А ако то није случај? Ми захтевамо само да се нађе једно од таквих правила. То је једино исправно, иако уноси извесну неодређеност и може деловати збуњујуће.

Подсетимо се да, за задатих првих неколико чланова низа, постоји бесконачно много правила налажења члана низа на n-томе месту, која ће давати управо те чланове на назначеним местима. За одређивање таквих правила можемо се, поред осталих, послужити и методом који је ослоњен на Лагранжов метод конструисања интерполационих полинома. Ми ћемо га илустровати једним примером.

Пример. Одредити једно од правила налажења члана на n-томе месту низа 2, 5, 8, ...

Прећутно подразумевајући да се одатле може наслутити тражено правило, уочавамо да је једно од таквих правила $3n-1$.

Поменути метод би нам дао још бесконачно много таквих правила. Пишемо:

$$a_n = \frac{(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot 2 + \frac{(n-1)(n-3)}{(3-1)(2-3)}\cdot 5 + \frac{(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)}\cdot 8 + (n-1)(n-2)(n-3)P(n),$$

где је $P(n)$ било који полином по n. Очигледно је:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 8.$$

А даље? Узмимо $P(n) \equiv 1$. Добићемо:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 17, \quad a_5 = 38, \quad \ldots$$

Наравно, избором уместо $P(n)$ било које реалне функције чији је домен $\mathbf{N}$ добијамо исто тако правило које ће за прва три члана низа дати 2, 5, 8.

Циљ нам је да читаоце ових редова обавежемо да у задацима овог типа увек траже једно од правила. Свесни да их има бесконачно много.

2. Дељивост бројева

Приликом обраде ових традиционалних садржаја у настави математике, у петом или шестом разреду, покушали смо да остваримо, на одговарајући начин, почетни сусрет ученика са строгим приступом једноставним истинама, које су кроз претходне активности наслутили. Апарат којим се овде користимо релативно је једноставан и он, својом сложеношћу и нивоом захтева, неће сувише оптеретити обраду садржаја ни изазвати отпор код већине ученика, често формулисан реченицом типа: „Шта ту има да се доказује, кад је све јасно?“. Веома је важно да се предложене уводне активности уз сваку лекцију темељно обраде и савладају, како би оне подстакле ученике да наслуте општа тврђења и осете потребу за њиховим потврђивањем неком врстом аргументације. Иако смо се трудили да дамо потпуне доказе, у пракси се можемо задовољити и тзв. локалним дедукцијама. При томе ће неки од корака у доказу бити изостављен или замењен позивањем на неки пример, раније искуство или своје виђење – интуицију.

Повремено смо себи дозволили, свесно и намерно, да се код неких тврђења еквиваленцијског типа не задовољимо само доказом довољности неког услова, него смо доказали и његову неопходност. Ученици овог узраста, по правилу, не осећају потребу за тим. Они су навикнути, што је исправно и добро, да на основу урађених примера, раде по аналогији, користећи стечено искуство. То су реченице типа „ако p, онда q“, у којима се подразумева да из истинитости исказа p следи истинитост исказа q. А да ли из истинитости исказа q следи истинитост исказа p? Ова и слична питања остају, по правилу, ван њиховог видокруга. Али, зато смо ми ту, да их „узнемиримо“.

Основна својства

У предложеном приступу најважнији су почетни кораци. Они ће послужити као подстицај и опомена да у овим, ученицима блиским и, њима се тако чини, једноставним чињеницама и поступцима, наслуте доста новог и непознатог, али њиховим могућностима доступног садржаја.

Налажење различитих делилаца природног броја је несумњиво занимљив задатак за ученика петог разреда. Али, посебан је изазов налажење свих његових делилаца. Јасно је да би, у случајевима када је тај број релативно мали, какав је и број 48 у нашем примеру, ученик могао да провери редом, за све природне бројеве мање или једнаке 48, да ли су они делиоци броја 48. Ако се такав покушај појави у пракси, ми ћемо га похвалити (ученик се досетио и његов пут води до решења задатка), али га и благо обесхрабрити тек нешто промењеним задатком да нађе све делиоце броја 105. Тешко да ће се у овом примеру било који ученик одважити на мукотрпан пут „пребирања“ делилаца и верујемо да ће сви са задовољством прихватити наш предлог да мало сачекамо и научимо како се уз помоћ математичких знања тај задатак лако и једноставно решава. Наравно, ми смо свесно изабрали број 105 због $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, што нам показује да он има тачно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ различитих делилаца, и биће, кад му време дође, заиста лако и једноставно наћи свих 8 његових делилаца.

Многе од теорема у теорији бројева су суштински импликацијског типа у смислу да у њима садржана импликација није тек „половина“ еквиваленције. У таквим случајевима се морамо потрудити да разуверимо ученике у њиховом, од нас очекиваном, настојању, ослоњеном на раније стечено искуство, да на основу доказане (на било који начин) импликације закључе да се могу користити и њеним обратом.

Покушали смо ово да остваримо путем примера 02[3] и 03[4]. Пример 02 нам указује директно на пут доказа општег тврђења: Ако су природни бројеви a и b, $a \geqslant b$, дељиви природним бројем k, тада су њихови збир $a+b$ и разлика $a-b$ дељиви бројем k.

Ово је тврђење суштински импликацијског типа. Његов обрат не важи, што је примером 03 *доказано.* Будући да се у настави математике често налазимо у ситуацији да неко тврђење оповргавамо конструисањем контрапримера, задржимо се за кратко на формулисаној теореми, у ствари на њеном делу са $a+b$. Услов $a \geqslant b$ уведен је због разлике, па га овде можемо „заборавити“. Заиста, ако није $a \geqslant b$, онда је $a < b$, што у збиру не мења ситуацију. Дакле, имамо теорему:

Ако су природни бројеви a и b дељиви природним бројем k, тада је и њихов збир $a+b$ дељив бројем k.

[3] **Пример 02**. Број 42 је дељив бројем 7. Број 14 је такође дељив бројем 7. Њихов збир је дељив са 7. Њихова разлика је дељива са 7.

[4] **Пример 03**. Број 14 можемо представити у облику збира бројева 9 и 5. Ни број 9 ни број 5 нису дељиви са 7, а њихов збир јесте.

У њој се јављају три променљиве a, b, $k \in \mathbf{N}$. Будући да о њима ништа додатно нисмо рекли, *подразумева се* (то не морамо ничим нагласити) да су оне универзално квантификоване. Стога би употпуњена формулација теореме гласила:

За свака три природна броја a, b, k важи: ако су a и b дељиви са k, тада је и њихов збир $a+b$ дељив са k.

Њен обрат (који намеравамо да оповргнемо) би гласио:

За свака три природна броја a, b, k важи: ако је збир $a+b$ дељив са k, тада су a и b дељиви са k.

Доказаћемо да важи негација овог тврђења. У том циљу подсетимо се неких елемената математичке логике, који ће нам у даљем бити потребни.

Негација неког тврђења са универзално квантификованом променљивом (променљивим) еквивалентна је негацији тог тврђења с егзистенцијално квантификованом променљивом (променљивим). Дакле,

1° $\neg(\forall x \in X)\, t(x) \iff (\exists x \in X)(\neg t(x))$.

Знамо и да је

2° $\neg(p \implies q) \iff p \wedge \neg q$,

3° $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$.

Негација наведеног обрата гласи:

Постоје природни бројеви a, b, k такви да је $a+b$ дељив са k и при томе a није дељив са k или b није дељив са k.

Да бисмо ово тврђење доказали довољно је навести једну такву тројку бројева a, b, k, а управо то је учињено у примеру 03; кажемо и да је у том примеру наведен један контрапример, што доказује да обрат теореме не важи. Ово су коментари за нашу употребу а ученици су, по правилу, задовољни у уџбенику наведеним доказом и могло би бити сувишно коментарима доводити у сумњу нешто у шта не сумњају.

Дељење с остатком

Ово није први сусрет ученика с поступком дељења с остатком природног броја природним бројем. Бавили су се они тиме у другом и трећем разреду. Тај традиционални садржај се, захваљујући извесној инертности образовног система, обрађује неуједначено и уз коришћење различитих, често и погрешних, за математику неприхватљивих ознака и поступака. Стога предлажемо да се, у циљу превазилажења таквих тешкоћа, посвети пуна пажња уводним примерима, као и да се више примера илуструје на бројевној полуправој.

Дељење с остатком је поступак при којем се броју $a \in \mathbf{N}_0$ и броју $b \in \mathbf{N}$ придружују *количник* при дељењу с остатком броја a бројем b, означимо га са q, и *остатак* при том дељењу, означимо га са r. Да бисмо могли говорити о количнику и остатку при таквом дељењу, то морају бити одређени бројеви. Дакле, морамо доказати њихово постојање и њихову јединственост. Иако смо се у Уџбенику ослонили на очигледност и својство да сваки одозго ограничен подскуп скупа природних бројева има највећи елемент, потрудићемо се сада да, пре свега за себе, строго докажемо одговарајуће тврђење позивајући се на својства A_1 и A_2 из првог поглавља овог текста.

Теорема. *За свако* $a \in \mathbf{N}_0$ *и свако* $b \in \mathbf{N}$ *постоје јединствени* $q \in \mathbf{N}_0$ *и* $r \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$, *такви да је* $a = bq + r$.

Доказ. Посматрајмо бројеве b, $2b$, $3b$, ... Према Архимедовом својству (A_2) постоји $c \in \mathbf{N}$, такво да је $a < b \cdot c$. Скуп свих оних $c \in \mathbf{N}$ за које је та неједнакост тачна је непразан подскуп скупа $\mathbf{N}$. На основу својства о најмањем елементу (A_1), тај скуп садржи свој најмањи елемент. Нека је то $c_0 \in \mathbf{N}$. Будући да је c_0 најмањи природан број за који је $a < b \cdot c$, биће $a < b \cdot c_0$ и $a \geqslant b \cdot (c_0 - 1)$. Дакле,

$$b \cdot (c_0 - 1) \leqslant a < b \cdot c_0.$$

Означимо $c_0 - 1 = q$. Онда је $q \in \mathbf{N}_0$ и важи $bq \leqslant a < b(q+1)$, односно

$$0 \leqslant a - bq < b.$$

То значи да за број $a - bq \in \mathbf{N}_0$ важи

$$a - bq \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}.$$

Озничимо ли $a - bq = r$, коначно налазимо да је:

$$a = bq + r, \quad q \in \mathbf{N}_0, \quad r \in \mathbf{N}_0, \quad r \in \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$

Тиме смо доказли да такви бројеви q и r постоје.

Докажимо да су они јединствени. Претпоставимо да постоје q_1, r_1 и q_2, r_2, такви да је

$$a = bq_1 + r_1 \quad \text{и} \quad a = bq_2 + r_2,$$

при чему $q_1, q_2 \in \mathbf{N}_0$ и $r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Не нарушавајући општост расуђивања претпоставимо да је $r_1 \leqslant r_2$. Тада је

$$bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2,$$

односно

$$r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2).$$

Због $r_2 - r_1 \geqslant 0$ и $b > 0$, мора бити $q_1 \geqslant q_2$. Разлика бројева r_2 и r_1 је природан број или нула, мањи је од b (од броја $r_2 \in \mathbf{N}_0$ који је мањи од b одузимамо ненегативан број r_1) и дељив је са b. То је могуће само ако је та разлика једнака нули.

Дакле,

$$r_1 = r_2 \quad \text{и} \quad b(q_1 - q_2) = 0.$$

Одатле, због $b > 0$ (b је природан број),

$$r_1 = r_2 \quad \text{и} \quad q_1 = q_2.$$

Теорема је доказана.

Као што смо рекли, број q називамо количником а број r остатком при дељењу броја a бројем b. Једнакост

$$a = bq + r, \quad r \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$$

изражава то дељење. У случају $r = 0$ кажемо да остатка нема, дељење је без остатка, a је *дељив* са b.

Последица. *При дељењу (с остатком) броја* $a \in \mathbf{N}_0$ *бројем* $b \in \mathbf{N}$ *остатак је тачно један од бројева* $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

Ми знамо да тврђења претходне теореме и ове последице, уз мале модификације, важе и приликом дељења с остатком у скупу $\mathbf{Z}$ целих бројева. Важи

Теорема*. *За свако* $a \in \mathbf{Z}$ *и свако* $b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ *постоје јединствени* $q \in \mathbf{Z}$ *и* $r \in \{1, 2, \ldots, |b|-1\}$, *такви да је* $a = bq + r$.

Последица*. *При дељењу (с остатком) броја* $a \in \mathbf{Z}$ *бројем* $b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ *остатак је тачно један од бројева* $0, 1, 2, \ldots, |b|-1$.

Критеријуми дељивости

У уводном тексту за ово поглавље смо најавили покушај строгог излагања неких садржаја, пре свега тврђења еквиваленцијског типа. На овоме месту смо у прилици да учинимо важан корак, да помогнемо ученицима да направе корак у правцу свесних настојања да се истине заснивају, знање почне организовати у сређену зграду.

Сви овде обрађени критеријуми дељивости (декадним јединицама и бројевима 2, 5, 4) су теореме еквиваленцијског типа. Дељивост са 2, 5, и 10 ученици су, кроз разне задатке већ имали и из те проблематике су стекли искуства. Традиционални приступ подразумева да се приликом првог сусрета упознају оне „половине“ тврђења које дају довољне услове дељивости. Ми сми се определили да, ослањајући се на доказана основна својства релације „бити дељив“, сваки од тих критеријума формулишемо и докажемо у потпуности, исказујући одвојено њихову довољност и њихову неопходност (додуше у форми њене, њој еквивалентне, контрапозиције). Надамо се да ће нас колеге, реализатори наставе разумети и прихватити. При томе треба свакако избегавати коришћење, у математичкој логици одомаћених, реченица типа: „ ... ако и само ако ... “ или „ ... неопходно је и довољно ... “. Чини нам се да је и ово наглашавање потребе да се и друга импликација докаже велик и озбиљан корак и не треба га даље оптерећивати новим терминима.

Ослањање на већ упозната основна својства скупа $\mathbf{N}$ омогућава нам да критеријуме дељивости са 3 и 9 докажемо на исти начин на који смо то урадили, у претходној јединици, за дељивост декадним јединицама и бројевима 2, 5, 4. На тај начин, по правилу већ добрим делом упознате чињенице о дељивости са 10, 2, 5 (кроз примере у настави математике у млађим разредима) постају добра припрема за критеријуме дељивости са 3 и 9, што је увек био озбиљан изазов. За разлику од претходних, ове критеријуме ученици ће доживети као нешто заиста ново, они су свесни да ту има шта да се доказује и тешко бисмо их са неколико примера уверили да збир цифара природног броја и његова дељивост са 3 (или 9) може бити индикатор дељивости самог броја са 3 (или 9), у смислу да такву дељивост утврди или оповргне. За то ће нам они сигурно тражити доказ.