Др Светлана Јанковић

НЕКИ МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ У БИОЛОГИЈИ И ЕКОНОМИЈИ – КОРАК КА ПРОФЕСИОНАЛНОЈ ОРИЈЕНТАЦИЈИ УЧЕНИКА КА МАТЕМАТИЦИ

С обзиром на светски тренд у образовању уопште, па и у образовању ученика средњих школа, да се теоријска знања стичу да би се могла практично применити, циљ овог рада је да укаже на неке новије трендове у образовању ученика, који би могли утицати на њихову будућу професионалну оријентацију ка математици.

Како научна предвиђања светске научне елите указују да ће двадесетпрви век бити век борбе за биолошки опстанак живог света, дакле, век биологије, а незаобилазно и економије, од интереса је упознати ученике са неким једноставнијим математичким моделима у овим областима. За разматрање ових математичких модела неопходно је само основно познавање диференцијалног рачуна. На крају овог рада само се указује на неке стохастичке моделе, са намером да се ученици на време оријентишу ка изучавању теорије вероватноће и математичке статистике, као неопходне основе за будући рад у изузетно атрактивним пословима финансијских аналитичара у области савремених финансија и берзанског пословања, или сарадника у истраживачким биолошким лабораторијама.

Реални процеси у многим областима, у биологији, медицини, хемији, механици, инжењерству, социјалним наукама, економији, у којима се динамика процеса математички моделира једначинама које садрже изводе непознатих функција – *диференцијалним једначинама*, називају се *динамички модели* у овим областима. Они могу бити веома комплексни, тако да се за њихово описивање по правилу користи сложен математички апарат, који најчешће укључује нумеричко и графичко решавање диференцијалних једначина, оптимизацију и, наравно, познавање најновијих информационих технологија.

Суштина математичког моделирања оваквих реалних процеса може се сагледати на простим динамичким моделима у биологији и економији, од којих ће неки бити овде описани. По својој природи процеси могу бити дискретни (број бактерија на неком простору, дневна цена неке робе, број акција неке фабрике) и непрекидни (количина ензима у организму, ниво шећера у крви, количина извађене нафте на неком назазишту). У наредним моделима основна апроксимација

Саопштено на Републичком семинару о настави математике и рачунарства, Ниш 2003.

од које се полази је да се *и у дискретном случају динамички модели описују непрекидним процесима.*

Ако се са t означи време, са $x(t)$ вредност процеса у моменту t, динамика процеса – брзина раста процеса, одређена је променом вредности процеса у времену, (промена броја јединки у популацији у јединици времена), тј.

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\approx\frac{dx(t)}{dt}=x'(t)$$

Према томе, брзина раста процеса математички се моделира изводом $x'(t)$. При условима који погодују расту процеса, брзина раста је позитивна ($x'(t)>0$), а при опадању процеса, брзина раста је негативна ($x'(t)<0$). Отуда се динамика процеса описује везом између величина t, $x(t)$ и $x'(t)$, тј. диференцијалном једначином

$$F(t,x(t),x'(t))=0,\quad t>0,\ x(0)=x_0.$$

Број x_0 је почетна вредност процеса – вредност процеса у почетном моменту посматрања $t=0$.

1. Динамички модел раста популације

Једноставан пример динамичког модела је опис динамике раста неке популације у функцији времена, која може бити, на пример у биологији – људска, животињска, колонија микроорганизама, ћелија, количина фермената или ензима при неким хемијским реакцијама; у економији – величина капитала, каматних стопа, пореских стопа, итд.

У великом броју простих модела, при идеалним условима затворених система на које не делују утицаји из природног окружења, логично се претпоставља да је брзина раста популације сразмерна величини популације. Ако се са r означи стопа раста (коефицијент пропорционалности), а у почетном моменту $t=0$ величина популације је била $x(0)=x_0$, при чему је $x_0>0$, тада се величина популације у моменту $t>0$ описује диференцијалном једначином

$$x'(t)=r\,x(t),\quad t>0,\ x(0)=x_0. \tag{1}$$

Како је $x'(t)>0$ за $r>0$ и $x'(t)<0$ за $r<0$, то је $x(t)\neq 0$ за свако $t\geqslant 0$. Фактор пропорционалности r се одређује на основу података о популацији.

Решавање диференцијалне једначине (1) се заснива на основним принципима диференцијалног рачуна. Како

$$\frac{dx(t)}{dt}=r\,x(t)\quad\Rightarrow\quad\frac{dx(t)}{x(t)}=r\,dt\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dx(t)}{x(t)}=\int r\,dt,$$

то је

$$\ln x(t)=rt+c,\quad\text{дакле}\quad x(t)=e^{rt+c},$$

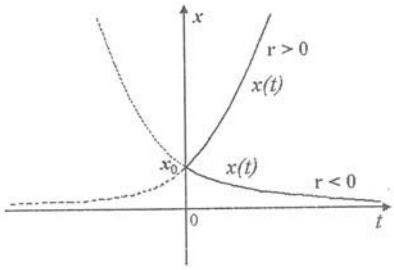
где је c произвољна константа. Ако означимо $C=e^c$, тада је

$$x(t)=C\,e^{rt},\quad t\geqslant 0,$$

тако да једначина (1) има класу решења која зависи од произвољне константе C и која се назива опште решење. Константу C ћемо одредити из почетног услова. За $t = 0$ је $x_0 = x(0) = C$, тако да је динамика раста популације описана експоненцијалном функцијом

$$x(t) = x_0\, e^{rt}, \quad t \geqslant 0$$

и графички је приказана на слици 1.



Сл. 1

Јасно, $x(t) \to +\infty$ кад $t \to +\infty$ ако је $r > 0$; $x(t) \to 0$ кад $t \to +\infty$ ако је $r < 0$. Процеси који имају тенденцију раста са протоком времена, називају се *процеси рађања*, а они са тенденцијом опадања са протоком времена, *процеси умирања*.

Пример 1. На Земљи је 1970. године било $3.6 \cdot 10^9$ људи. Ако је годишњи прираштај $60 \cdot 10^6$ људи, колико их је било 1980. године; 2000. године? Колико ће их бити 2010. године?

Стопа раста је једнака односу прираштаја и величине популације, тако да је у овом случају

$$r = \frac{60 \cdot 10^6}{3.6 \cdot 10^9} = 0.017, \qquad (1.7\%)$$

Отуда је динамика раста људске популације математички описана једначином

$$x'(t) = 0.017\, x(t), \quad t > 0, \quad x(0) = 3.6 \cdot 10^9,$$

у којој је за почетни тренутак посматрања $t = 0$ узета 1970. година. Ова једначина има решење

$$x(t) = 3.6 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017\, t}, \quad t \geqslant 0.$$

Према томе, 1980. и 2000. године по овом математичком моделу број људи на Земљи је

$$x(10) = 3.6 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017 \cdot 10} \approx 4.27 \cdot 10^9$$
$$x(30) = 3.6 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017 \cdot 30} \approx 6 \cdot 10^9.$$

У оба случају величина људске популације одговара реалном стању, тако да се може очекивати да и прогноза за 2010. годину буде прихватљива,

$$x(40) = 3.6 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017 \cdot 40} \approx 7.1 \cdot 10^9.$$

Међутим, у дужем временском периоду ово не мора важити, јер долази до промене фактора пропорционалности r. △

Претходни математички модел је исти и у случају камаћења новца у стабилним банкама, при чему је камата фиксна само у краћем временском периоду, у коме се не очекују знатније промене на финансијском тржишту. Она се мења у одређеним временским интервалима, у зависности од кретања капитала на финансијском тржишту, тј. од финансијских показатеља који утичу на њену вредност.

У претходним моделима адекватније би било посматране процесе математички моделирати диференцијалном једначином са функционалним коефицијентом пропорционалности $r(t)$, тј. једначином

$$x'(t) = r(t)\,x(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

Динамика раста популације (капитала са променљивом каматном стопом) је у том случају

$$x(t) = x_0\, e^{\int_0^t r(u)\,du}, \quad t \geqslant 0.$$

Пример 2. Колонија бактерија E. Coli размножава се тако да се свака бактерија после 20 min дели на две бактерије. Ако је у почетном тренутку $t = 0$ била само једна бактерија, колико ће их бити за 24 h?

Формира се непрекидан математички модел

$$\begin{aligned} &x'(t) = r\,x(t), \quad t \geqslant 0 \\ &x(0) = 1, \quad x(20) = 2, \end{aligned}$$

у коме је временска скала подељена на минуте и у коме се фактор пропорционалности r одређује на основу датих података. Из општег решења ове једначине $x(t) = C \cdot e^{rt}, t \geqslant 0$, и из датих услова је

$$1 = x(0) = C, \quad 2 = x(20) = e^{20\,r} \quad \Rightarrow \quad r = \ln 2/20,$$

тако да је једначина динамике раста броја бактерија

$$x(t) = e^{(\ln 2/20)\,t} = 2^{t/20}, \quad t \geqslant 0.$$

После 24 часа, односно 1440 минута, број бактерија би био

$$x(1440) = 2^{1440/20} = 2^{72},$$

што представља биомасу која превазилази величину Земље! Јасно, ово се не догађа, јер велики број бактерија изумире због недостатка хране и лучења токсичних материја које спречавају размножавање бактерија, као и због других неповољних утицаја из спољашње средине. После извесног времена се постиже равнотежа између броја бактерија које се размножавају и оних које умиру. За E. Coli бактерије стационарно стање у коме се број бактерија одржава, постиже се при концентрацији броја бактерија од $2 \cdot 10^9 - 5 \cdot 10^9$ по кубном милиметру. △

Дакле, адекватнији математички модел у претходном случају би био онај који укључује и процес рађања и процес умирања, тј.

$$x'(t) = r_1\, x(t) - r_2\, x(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0,$$

где први сабирак на десној страни одговара расту популације по стопи раста $r_1 > 0$, а други броју јединки које напуштају популацију по стопи раста $r_2 > 0$.

2. Регулисани прираштај популације

У неким случајевима је по физичким карактеристикама популације познато да величина популације не може премашити неку унапред задату вредност. На пример, при размножавању микроорганизама у ограниченом простору, зна се да их не може бити више од неког унапред задатог броја M. Зато је логично поставити математички модел тако да је брзина раста популације пропорционална величини популације $x(t)$, али и разлици $M - x(t)$, тако да са протоком времена брзина раста популације успорава до нуле када разлика $M - x(t)$ опада ка нули. Због тога је математички модел представљен диференцијалном једначином облика

$$x'(t) = r\, x(t)[M - x(t)], \quad t > 0, \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Она се решава елементарно. Како

$$\frac{dx(t)}{x(t)[M - x(t)]} = r\, dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx(t)}{x(t)[M - x(t)]} = r \int dt, \quad t \geqslant 0,$$

решавање се своди на интеграцију рационалне функције. Из

$$\frac{1}{x(t)[M - x(t)]} = \frac{A}{x(t)} + \frac{B}{M - x(t)} = \frac{(-A + B)x(t) + AM}{x(t)[M - x(t)]}$$

следи $AM = 1$, $-A + B = 0$, тј. $A = B = 1/M$, тако да је

$$\frac{1}{M} \int \frac{dx(t)}{x(t)} + \frac{1}{M} \int \frac{dx(t)}{M - x(t)} = r \int dt, \quad t \geqslant 0,$$
$$\frac{1}{M} \ln x(t) - \frac{1}{M} \ln[M - x(t)] = rt + c, \quad t \geqslant 0.$$

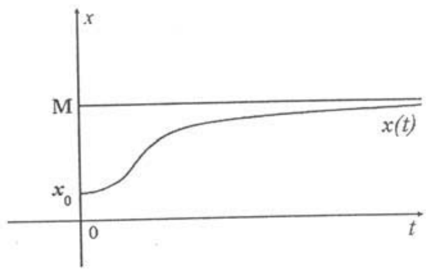
Према томе,

$$\frac{x(t)}{M - x(t)} = e^{rM\,t} \cdot e^{Mc}, \quad t \geqslant 0.$$

Из услова $x(0) = x_0$ следи $e^{Mc} = x_0/(M - x_0)$, тако да је коначно

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)\, e^{-rM\,t}}, \quad t \geqslant 0.$$

Ово је *логистичка једначина регулисаног раста популације.* Приметимо да $x(t) \to M$ кад $t \to +\infty$, што се може видети и са графика функције на слици 2.



Сл. 2

Слично претходном моделу, неки биолошки процеси, као и процеси у економији, моделирају се једначином

$$x'(t) = r\,x(t)[M - \ln x(t)], \quad t > 0,\ x(0) = x_0.$$

Приметимо да је брзина раста овог процеса већа него у претходном случају, јер је $M - \ln x(t) \geqslant M - x(t)$.

За велики број еко-система математички модел који описује динамику раста популације је облика

$$x'(t) = rx(t) - \alpha\, x^2(t), \quad t > 0,\ x(0) = x_0,$$

где је $\alpha > 0$ *коефицијент самоуништења.* Сабирак $-\alpha\, x^2(t)$ на десној страни ове једначине указује на умањење брзине раста популације за број јединки које се уништавају у међусобној интеракцији, на пример трујући себе и једна другу токсинима које излучују (у популацији са N јединки укупан број реакција самоуништења је N^2). Ова једначина се решава слично једначини (2), тако да је

$$x(t) = \frac{rx_0}{\alpha x_0 + (r - \alpha x_0)\, e^{-r\,t}}, \quad t \geqslant 0.$$

3. Општи динамички модел

Може се поставити општи динамички модел

$$x'(t) = r\,x(t) - \alpha\, x^2(t) + \beta\, P(x(t)) - \gamma\, Q(x(t)), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0,$$

у коме су константни параметри $r \in R$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Прва два сабирка на десној страни су описана као у претходном моделу, $P(x(t))$ представља број јединки које пристижу у еко-колонију из спољашње средине (у економији, то би била количина новца која се додатно улаже у финансијски процес), а $Q(x(t))$ је број јединки које напуштају колонију (количина новца која се одстрањује из финансијског процеса).

У општијем случају, уместо констаната у претходном моделу могу бити функције времена,

$$\begin{aligned} &x'(t) = r(t)\, x(t) - \alpha(t)\, x^2(t) + \beta(t)\, P(x(t)) - \gamma(t)\, Q(x(t)), \quad t > 0, \\ &x(0) = x_0, \end{aligned}$$

или још општије, t и $x(t)$ могу бити у било којој функционалној зависности преко ненегативних функција P и Q,

$$x'(t) = r(t)\,x(t) + P(t,(x(t)) - Q(t,(x(t)), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

Наравно, посебан проблем представља решавање оваквих једначина. Како је мали број ефективно решивих диференцијалних једначина, обично се приступа њиховом нумеричком решавању.

Дакле, динамички модел мора бити тако постављен, да довољно прецизно описује реално стање процеса на који се односи. Парамерти у динамичком моделу се процењују углавном статистички, на основу претходних информација о процесу, тј. анализом података о процесу. Тиме се омогућава *предвиђање понашања процеса*, што је и примарни циљ математичког моделирања уопште.

4. Стохастички модели

У свим претходним моделима нису узимани у обзир случајни утицаји на динамичке системе. Међутим, у реалности се стопа раста, поред променљивости у времену, мења и у зависности од случајних утицаја, на пример, од промена климатских услова живота биолошке заједнице, или случајног кретања капитала на финансијском тржишту. Због тога је логично стопу раста математички моделирати као збир

$$r(t,\omega) = r + \sigma\,\xi(t,\omega), \quad t \geqslant 0,$$

где су r и σ неслучајне вредности, а $\xi(t,\omega)$ је случајна променљива у којој су случајни догађаји ω из неког простора елементарних догађаја Ω. Ова случајна променљива се мења и у зависности од времена, дакле, јесте *случајни процес*. У великом броју стохастичких модела случајна променљива $\xi(t,\omega)$ има нормалну расподелу за свако $t > 0$, односно ради се о случајном процесу познатом као *Гаусов бели шум*. Реални процес у динамичком моделу је моделиран случајним процесом $x(t,\omega)$, чија се динамика раста описује једначином

$$dx(t,\omega) = r\,x(t,\omega)\,dt + \sigma\,x(t,\omega)\,\xi(t,\omega)\,dt, \quad t > 0, \quad x(0,\omega) = x_0$$

У литератури је познато да је Гаусов бели шум формални извод Винеровог процеса $w(t,\omega)$ (процеса Брауновог кретања), тј. $\xi(t,\omega) = \dfrac{dw(t,\omega)}{dt}$. Тако се долази до *стохастичке диференцијалне једначине*

$$dx(t,) = r\,x(t,\omega)\,dt + \sigma\,x(t,\omega)\,dw(t,\omega), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

у којој се r и σ одређују статистички у сваком конкретном случају.

Аналогно детерминистичком моделу **2**, у стохастичком моделу динамика регулисаног случајног раста популације описана је случајним процесом

$$dx(t,\omega) = r\,x(t,\omega)[M - x(t,\omega)]\,dt + \sigma\,x(t,\omega)\,dw(t,\omega), \quad t > 0, x(0) = x_0.$$

Једначином (3) се може моделирати, на пример, цена неке некретнине. Из саме једначине се могу добити и неке друге информације о цени, на пример оптимално време продаје, што се своди на одређивање временског тренутка t за коју је $x(t,\omega)$ највеће, са задатом веома високом вероватноћом.

Исто тако, једначином (3) се описује цена вредносних папира којима се тргује на берзама. Трговина на берзама се одвија помоћу примарних хартија од вредности, *деоница, обвезница, акција*, и финансијских деривата од којих су најзначајније *опције*. Док примарне хартије од вредности представљају стварни капитал који њихов власник поседује, опције представљају финансијске уговоре као вид осигурања од *ризика* у трговини. Оне свом власнику обезбеђују *могућност, али не и обавезу*, да купи или прода одређену количину примарних хартија од вредности по унапред уговореној цени у одређеном временском периоду. Прецизније, на основу ових уговора власник ће остварити добит куповином (продајом) хартија од вредности по уговореној цени у датом временском периоду, ако је њихова цена у тренутку куповине (продаје) нижа (виша) од цене на берзи. У супротном, он такву могућност неће искористити, чиме се штити од ризика да погрешном куповином (продајом) направи губитак.

Перманентни циљ власника хартија од вредности је да оствари највећу добит уз најмање улагање и ризик. У циљу смањења ризика, власник своја средства истовремено улаже у више различитих деоница, обвезница, акција и опција, за различите врсте робе. Скуп свих тих хартија од вредности назива се *портфолио*.

Променљивост параметара ризика утиче на динамику промене портфолија, тј. на перманентну промену односа различитих хартија од вредности и финансијских деривата у портфолију. Власник може добро избалансираним портфолиом знатно увећати свој капитал, или га изгубити због неадекватног портфолија, тј. због лоше процене кретања капитала на финансијском тржишту. Ту ступају на сцену *математичари – финансијски аналитичари*, чији је превасходни задатак да успешно математички моделирају сложене економске системе. Имајући у виду добит која се остварује оваквим пословима, занимање финансијског аналитичара је, у светским размерама, на врху лествице атрактивних занимања.

ЛИТЕРАТУРА

[1] К.К. Пономарев, *Састављање диференцијалних једначина*, Виша школа, Минск, 1973 (на руском).

[2] Б. Сендов, Р. Малеев, С. Марков, *Математика за биологе*, Наука и искуство, Софија, 1981 (на бугарском).

[3] P. Wilmoot, S. Howison, J. Dewynne, *Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, 1995.