**Др Шефкет Арсланагић**

# О ДОКАЗИМА ШТАЈНЕРОВЕ ТЕОРЕМЕ

Приликом утврђивања градива које се односи на подударност троуглова (први разред средње школе) обично се докаже и ова теорема:

*У једнакокраком троуглу су једнаке дужине симетрала углова на основици.*

*Доказ.* Нека су $\overline{AD}$ и $\overline{BE}$ дужине симетрала углова на основици једнакокраког троугла $ABC$, сл. 1. Како је $\angle BAE = \alpha = \beta = \angle ABD$, те $\overline{AB} = \overline{AB}$ и $\angle BAD = \alpha/2 = \beta/2 = \angle ABE$, то је $\triangle ABD \cong \triangle BAE$, а одавде $\overline{AD} = \overline{BE}$, тј. $s_\alpha = s_\beta$, што је и требало доказати.

Сл. 1

Сл. 2

Када је у питању обрат ове тврдње, тј. $s_\alpha = s_\beta \implies \triangle ABC$ је једнакокраки, доказ иде знатно теже. Дакле, ријеч је о доказу сљедеће теореме која је у геометрији позната као *Штајнерова*[1] теорема:

*Ако су дужине симетрала два угла троугла једнаке, троугао је једнакокрак.*

У [1] је аутор овог чланка дао пет доказа ове теореме. У овом чланку ћемо дати још два доказа.

*Доказ 1.* Најприје ћемо изразити дужине симетрала углова троугла помоћу дужина страница троугла. Уз ознаке као на сл. 2 имамо $x + y = c$, $x : y = b : a$, $\overline{CD} = s_\gamma$, $(x + y) : (b + a) = x : b$, те одавде

$$x = \frac{bc}{a+b}, \qquad y = \frac{ac}{a+b}.$$

[1] J. Steiner, 1796–1863, швајцарски математичар

За $a = b$ добијамо $x = y = \dfrac{c}{2}$, те $s_\gamma = \sqrt{a^2 - \dfrac{c^2}{4}}$; зато ћемо посматрати општи случај $a \neq b$.

Ако су тачке $E$ и $F$ подножја нормала из тачке $D$ на странице $BC$ и $CA$, тада су троуглови $DEC$ и $DFC$ подударни, те је $\overline{CE} = \overline{CF} = z$, $\overline{DE} = \overline{DF} = v$. Из Питагорине теореме примјењене на троуглове $CFD$, $AFD$, $CED$ и $BED$ добијамо

$$s_\gamma^2 = z^2 + v^2 = z^2 + x^2 - (b-z)^2,$$

тј. $s_\gamma^2 = x^2 - b^2 + 2bz$, те

$$s_\gamma^2 = z^2 + v^2 = z^2 + y^2 - (a-z)^2,$$

тј. $s_\gamma^2 = y^2 - a^2 + 2az$.

Сада из $as_\gamma^2 = ax^2 - ab^2 + 2abz$ и $bs_\gamma^2 = by^2 - a^2b + 2abz$ слиједи

$$(a-b)s_\gamma^2 = ax^2 - by^2 - ab^2 + a^2b,$$

односно $(a-b)s_\gamma^2 = a\,\dfrac{b^2c^2}{(a+b)^2} - b\,\dfrac{a^2c^2}{(a+b)^2} + ab(a-b)$, тј.

$$(a-b)s_\gamma^2 = \frac{abc^2}{(a+b)^2}(b-a) + ab(a-b),$$

те $(a-b)s_\gamma^2 = (a-b)\left(ab - \dfrac{abc^2}{(a+b)^2}\right)$, а одавде због $a \neq b$,

(1) $$s_\gamma^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}.$$

Аналогно добијамо

(2) $$s_\alpha^2 = bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2},$$

(3) $$s_\beta^2 = ac - \frac{acb^2}{(a+c)^2}.$$

Из услова $s_\alpha = s_\beta$, тј. $s_\alpha^2 = s_\beta^2$, на основу (2) и (3) слиједи

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = ac - \frac{acb^2}{(a+c)^2},$$

односно $b - \dfrac{a^2b}{(b+c)^2} = a - \dfrac{ab^2}{(a+c)^2}$, тј. $a - b = \dfrac{ab^2}{(a+c)^2} - \dfrac{a^2b}{(b+c)^2}$, дакле

(4) $$a - b = ab\left[\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2}\right].$$

Претпоставимо да је $a > b$, односно $a - b > 0$. Размотримо разлику

$$\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2}. \tag{5}$$

Због услова $a > b$ слиједи да је бројилац умањиоца већи од бројиоца умањеника, а именилац умањиоца мањи од имениоца умањеника, што значи да је умањилац већи од умањеника, па је посматрана разлика (5) негативна. Сада из (4) слиједи да је (због $a - b > 0$) позитиван број једнак негативном, што је немогуће.

До сличног закључка бисмо дошли ако бисмо претпоставили да је $a < b$, тј. $a - b < 0$. То значи да обје претпоставке $a > b$ и $a < b$ отпадају, па мора бити $a = b$, тј. троугао $ABC$ је једнакокрак, што је требало доказати.

*Доказ 2.* Нека је $\overline{BD} = x$ дужина симетрале угла код $B$, $\overline{CE} = y$ дужина симетрале код $C$, сл. 3. Нека је $\angle B = 2\beta$ и $\angle C = 2\gamma$, а дужине страница троугла $ABC$ су $a$, $b$ и $c$. Сада имамо $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle DBC}$, односно

$$\frac{1}{2}ac\sin 2\beta = \frac{1}{2}cx\sin\beta + \frac{1}{2}xa\sin\beta,$$

а одавде (због $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$) након дијељења горње једнакости са $\frac{1}{2}\sin\beta > 0$ добијамо

$$2ac\cos\beta = cx + xa,$$

а одавде

$$\cos\beta = \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right). \tag{6}$$

Сл. 3

Слично за симетралу $y$ угла $\angle BCA = 2\gamma$, на основу $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ACE} + P_{\triangle BCE}$ добијамо

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \tag{7}$$

Претпоставимо сада да странице $b$ и $c$ нису једнаке; нека је, на примјер, $b > c$. У овом случају угао $\beta$ који лежи насупрот веће странице $b$ је већи од угла $\gamma$ који лежи насупрот мање странице $c$. Дакле, $\beta > \gamma$, а одавде слиједи да је $\cos\beta < \cos\gamma$, односно због (6) и (7),

$$\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) < \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Како је по претпоставци $x = y$, добијамо из горње неједнакости $\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b}$, односно

$$b < c,$$

што је супротно учињеној претпоставци да је $b > c$. Дакле, $b$ и $c$ не могу бити неједнаке, па мора бити $b = c$, тј. $\triangle ABC$ је једнакокрак, што је и требало доказати.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Арсланагић, Ш., *О доказима Штајнерове теореме*, Путеви и достигнућа (Сарајево), **18**, 3–4 (1981), 47–52.

[2] Арсланагић, Ш., *Теорема о симетрали угла у троуглу и њена примјена*, Васпитање и образовање, часопис за педагошку теорију и праксу (Подгорица), **3** (2000), 97–106.

[3] Honsberger, R., *In Polya's Footsteps*, Miscellaneous Problems and Essays, The Mathematical Association of America, 1997, pp. 194–195.

[4] Сивашинский, И.Х., *Задачник по элементарной математике*, Наука, Москва, 1966.

**ОБАВЕШТЕЊЕ**

## УЧЕШЋЕ ЕКИПА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА И ПРОГРАМЕРА НА МЕЂУНАРОДНИМ ТАКМИЧЕЊИМА

Четрдесеттрећа Међународна математичка олимпијада одржана је јула ове године у Глазгову (Шкотска). Југословенска екипа за ово такмичење одређена је после Савезног такмичења из математике ученика средњих школа које је одржано у Бечићима, Балканске математичке олимпијаде, као и додатног такмичења одржаног у Београду. Сви наши такмичари су освојили медаље. *Миливоје Лукић* (Београд) освојио је сребрну медаљу (недостајао му је само један поен до златне), док су сви остали (*Александар Илић, Дејан Колунџија, Никола Тодоровић* (Ниш), *Јелена Милановић* (Београд) и *Маја Тасковић* (Нови Сад)) награђени бронзаним медаљама.

Јуниорска балканска математичка олимпијада (ученици до 15,5 година) одржана је крајем јуна у Тргу Мурешу (Румунија). Наша екипа формирана је после Савезног такмичења у Новом Саду. *Мирослав Николић* (Петроварадин) и *Игор Нинковић* (Београд) награђени су сребрним медаљама, а *Никола Шеховић* (Обреновац), *Андрија Јовановић* (Београд) и *Марко Павловић* (Пирот) су освојили бронзане медаље.

Балканска олимпијада из информатике одржана је од 21. до 26. јуна у Београду. Чланови наше екипе остварили су следеће резултате: *Александар Илић* из Ниша је освојио сребрну медаљу, а *Александар Златески* (Београд), *Дејан Колунџија* и *Никола Тодоровић* (Ниш) су добили бронзане медаље.

Четрнаеста Међународна информатичка олимпијада одржана је августа ове године у Јужној Кореји. Наши такмичари су поново били успешни и освојили су: Александар Златески и Дејан Колунџија сребрне, а Александар Илић и Никола Тодоровић бронзане медаље.