Раде Козар

ЈЕДНАКОСТИ И НЕЈЕДНАКОСТИ У ТРОУГЛУ

Реализација једног часа систематизације градива путем диференциране наставе

У овом раду биће приказан један час систематизације градива о троуглу у шестом разреду основне школе путем диференциране наставе. Феномен диференциране и индивидуализоване наставе дуго је присутан у педагошко-психолошкој теорији и наставној пракси, а сусрећемо га и у нашој наставној пракси, додуше не у потребној мери. Основно полазиште у организацији овог вида наставе је да се она организује на различитим ниовима тежине (захтевности).

Потреба за диференцирањем наставе јавила се пре потребе за њеном индивидуализацијом. Основне одлике диференцијације су у томе што се веће скупине ученика деле у мање групе и пред њих постављају различити захтеви. При томе је могуће примењивати фронтални, групни или индивидуални рад.

Разлике у индивидуалним могућностима ученика битно утичу на организацију наставног процеса, јер је немогуће остварити да се слабији ученици прилагођавају вишим захтевима.

Мишљења сам да је у нашој школи најприхватљивија такозвана унутрашња диференцијација. Груписање ученика се обавља спонтано-добровољно, на основу интересовања и међусобних односа ученика, а посебна брига је да се обезбеди да сваки ученик, како слабији тако и најбољи, развија своје способности, јер ученици усвајају знања различитим темпом, обимом и степеном самосталности. Јасно је да слабији ученици захтевају чешћу, дужу и обимнију помоћ наставника. За пружање ове помоћи неопходан је добро оспособљен и припремљен наставник. У раду су понуђене три групације задатака (различитх нивоа сложености), што подразумева поделу ученика одељења у три групе које је наставник већ раније утврдио. Наставник треба да има детаљна решења задатака свих група и да контролише и вреднује рад ученика сваке групе. На крају часа треба задати домаћи задатак (да се комплетира систематизација градива), такође по нивоима.

Понуђени начин концепције часа је само један могући модел, а сваки наставник ће у складу са властитим опредељењем и могућностима ученика сам одредити број група и избор задатака по нивоима.

Саопштено на Републичком семинару о настави математике и рачунарства, Нови Сад, 11–12. јануар 2002.

ЗАДАЦИ

Група А

1. На слици 1 је $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доказати да је $AD = DC$.
2. Тачке M и K леже са разних страна праве p. Растојање тачке M од праве p је $8\,\mathrm{cm}$, а тачке K $10\,\mathrm{cm}$. Може ли растојање међу тачкама M и K бити $17\,\mathrm{cm}$?

Сл. 1

Сл. 2

3. У троуглу ABC, $\angle ABC = 70^\circ$. Симетрала тог угла пресеца страницу AC у тачки D, тако да је $BD = DC$. Доказати да је $AB < AC$.
4. На слици 2 је $PO = OM$, $\angle PKO = \angle MTO = 90^\circ$. Доказати да је $PK = MT$.

Група В

1. У једнакокраком троуглу ABC основица $AC = 1$, $\angle A = 15^\circ$. Доказати да је $1 < 2\,AB < 2$.
2. Тачке A и B леже са различитих страна праве a. Нека су P и M редом тачке у којима нормале из A и B на праву a секу ту праву и нека је $AP = BM$. Нека је даље K тачка пресека дужи AB и праве a. Доказати да тачка K полови дужи AB и MP.
3. У једнакокраки правоугли троугао катета AB и AC уписан је правоугаоник, тако да са троуглом има заједнички прав угао. Доказати да је обим правоугаоника једнак $AB + AC$.
4. У троуглу ABC је $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Ако је AD висина троугла, доказати да је $\frac{1}{4}AB^2$ површина троугла ABC.

Група С

1. На слици 3 је $BO = OD$ и $AO = OC$. Доказати да је $CO < \dfrac{BC + CD}{2}$.

Сл. 3

Сл. 4

2. На слици 4 је $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle AKB = \angle CPD = 90°$. Доказати да је $KB = DP$.
3. На слици 5 је $AB = AC$. Доказати да је $AF > AD$.

Сл. 5

Сл. 6

4. На слици 6 је $PA = PB$, $BC \perp PA$, $AD \perp PB$. Доказати да је $PD = PC$.

Домаћи задатак

Група A

1. У троуглу ABC повучена је симетрала угла B која страницу AC сече у тачки K. Нађите $\angle C$ ако је $\angle A = 68°$, $\angle BKA = 81°$.
2. У правоуглом троуглу ABC хипотенузе $AC = 12\,\text{cm}$ повучена је висина BD. Нађите CD и DA ако је $\angle A = 30°$.
3. У једнакокраком троуглу основице AB један од спољашњих углова је $60°$, а висина спуштена на крак је $17\,\text{cm}$. Нађите основицу троугла.

Група B

1. У троуглу ABC повучена је симетрала угла A која страницу BC сече у тачки K. Нађи угао код B ако је $\angle C = 33°$, $\angle AKC = 110°$.
2. Нека је AC основица једнакокраког троугла ABC. Нека су K и L редом тачке у којима симетрале углова на основици секу странице BC и AB. Доказати да је $AK = CL$.
3. Један од спољашњих углова правоуглог троугла ABC је $120°$, а хипотенуза је $15\,\text{cm}$. Нађите најмању страницу тог троугла.

Група C

1. Доказати подударност троуглова ако су им једнаке по две странице и тежишне дужи које одговарају једној од тих страница.
2. Користећи слику 7 доказати да је $KL + LM + MN > KN$.
3. Дужина једне дужи је за $1\,\text{cm}$ већа од друге и за $4\,\text{cm}$ већа од треће. Могу ли те дужи бити странице троугла чији је обим $10\,\text{cm}$?

Сл. 7 Сл. 8

Решења

Група А

1. *Доказ.* Из $AB = BC$ следи $\angle BAC = \angle BCA$. Из $\angle BAC = \angle BCA$ и $\angle 1 = \angle 2$ следи да је $\angle BAC - \angle 1 = \angle BCA - \angle 2$, односно $\angle DAC = \angle DCA$, а одатле следи $AD = DC$, што је и требало доказати.

2. Послужимо се сликом 8. MF је хипотенуза правоуглог троугла MM_1F, па је $MF > MM_1$ (1). Из истих разлога је $FK > KK_1$ (2). Сабирањем неједнакости (1) и (2) добијамо $MF + FK > MM_1 + KK_1$, односно $MK > 8\,\mathrm{cm} + 10\,\mathrm{cm}$, $MK > 18\,\mathrm{cm}$. Дакле, растојање између тачака M и K не може бити $17\,\mathrm{cm}$.

3. Послужимо се сликом 9. Из $BD = DC$ следи $\angle C = \dfrac{\beta}{2} = 35^\circ$. Како је у троуглу ABC, $\angle B > \angle C$, то следи $AC > AB$ и тиме је доказ завршен.

Сл. 9 Сл. 10

4. *Доказ.* $\angle MOT = \angle POK = x$ (као унакрсни). Тада је $\angle KPO = \angle TMO = 90^\circ - x$. Посматрајмо правоугле троуглове PKO и MTO.

$$\left.\begin{array}{r} PO = OM \\ \angle MOT = \angle POK \\ \angle KPO = \angle TMO \end{array}\right\} \overset{\text{УСУ}}{\Longrightarrow} \triangle PKO \cong \triangle MTO.$$

Из подударности наведених троуглова следи $PK = MT$, што је и требало доказати.

Група В

1. *Доказ.* Послужимо се сликом 10. Из $AB = BC$ следи $\angle A = \angle C = 15^\circ$, $\angle B = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$. Дакле, $\angle B > \angle C$, па одатле произлази $AC > AB$, односно $AB < 1$. Множењем последње релације са 2 добијамо $2\,AB < 2$ (1).

С друге стране, из троугла ABC имамо $AB + BC > AC$, односно $2AB > 1$ (2). Обједињавањем (1) и (2) добијамо да је $1 < 2AB < 2$, а то је и требало доказати.

2. *Доказ.* Послужимо се сликом 11. Из $BM \perp a$ и $AP \perp a$ следи $BM \parallel AP$. Даље,

$$\left.\begin{aligned} &\angle MBK = \angle PAK \text{ (углови са паралелним крацима)}\\ &\angle M = \angle P = 90^\circ\\ &BM = AP \text{ (по услову задатка)}\end{aligned}\right\} \overset{\text{УСУ}}{\Longrightarrow} \triangle BKM \cong \triangle AKP,$$

па из њихове подударности следи $BK = AK$ и $MK = PK$. Доказ је завршен.

Сл. 11

Сл. 12

3. *Доказ.* По услову задатка из $AB = AC$ следи $\angle B = \angle C = 45^\circ$ (слика 12). Посматрајмо правоугли троугао BB_1D. Из $\angle B_1 = 90^\circ$ и $\angle B = 45^\circ$ следи $\angle D = 45^\circ$, дакле $\triangle BB_1D$ је једнакокраки правоугли, па је $B_1D = B_1B$. На исти начин из правоуглог троугла DC_1C налазимо $DC_1 = C_1C$. Најзад, тражени обим правоугаоника је $O = AB_1 + B_1D + DC_1 + AC_1 = AB_1 + B_1B + C_1C + AC_1$, односно $O = AB + AC$, а то је и требало доказати.

4. *Доказ.* $\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$. Значи, $\angle A = \angle C = 75^\circ$, па је $\triangle ABC$ једнакокрак а одатле следи $AB = CB$ (слика 13). $\angle DAB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Троугао ADB има углове од 60°, 30° и 90°, па је $AD = \frac{1}{2}AB$. Површина троугла ABC је

$$P = \frac{1}{2}\,CB \cdot AD = \frac{1}{2}\,AB \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{4}AB^2.$$

Сл. 13

Тиме је доказ завршен.

Група C

1. *Доказ.* Посматрајмо $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$.

$$\left.\begin{aligned} BO &= OD\\ \angle OA &= \angle OC\\ \angle AOD &= \angle BOC\end{aligned}\right\} \overset{\text{СУС}}{\Longrightarrow} \triangle AOD \cong \triangle BOC.$$

Из подударности следи $AD = BC$ (1). С друге стране, из $\triangle ADC$ имамо $AC < AD + DC$, $2OC < AD + DC$, односно коришћењем (1), $2OC < BC + CD$, па је $OC < \dfrac{BC + CD}{2}$. Тиме је доказ завршен.

2. *Доказ.* Позматрајмо $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$.

$$\left.\begin{array}{r} AB = CD \\ BC = AD \\ AC = AC \end{array}\right\} \overset{\text{ССС}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle CDA.$$

Из подударности ових троуглова следи $\angle BAC = \angle ACD$.

Троуглови CPD и AKB су такође подударни,

$$\left.\begin{array}{c} AB = CD \\ \angle BAK (= \angle BAC) = \angle DCP (= \angle DCA) \\ \angle CDP = \angle ABK (= 90^\circ - \angle BAC) \end{array}\right\} \overset{\text{УСУ}}{\Longrightarrow} \triangle CDP \cong \triangle AKB.$$

Из подударности ових троуглова следи $BK = DP$, што је и требало доказати.

3. Како је $AB = AC$, то је $\angle B = \angle C$. $\angle ADF = \angle ADE$ је спољашњи за троугао BED, па је $\angle ADF = \angle B + \angle E$. То значи да је

$$\angle ADF > \angle B. \tag{1}$$

С друге стране, $\angle C$ је спољашњи за троугао CEF па је $\angle C = \angle B = \angle E + \angle F$, односно $\angle B = \angle E + \angle AFD$ ($\angle AFD = \angle CFE$ као унакрсни). Из последње релације налазимо $\angle AFD = \angle B - \angle E$, тј.

$$\angle AFD < \angle B. \tag{2}$$

Из (1) и (2) налазимо $\angle ADF > \angle AFD$, па је $AF > AD$.

4. Спојимо тачке A и B на слици 14. Тада из $PA = PB$ следи $\alpha = \beta$. Из правоуглог троугла ADB имамо $\beta + y = 90^\circ$, а из правоуглог троугла BCA имамо $\alpha + x = 90^\circ$. Како је $\alpha = \beta$, то из последњих релација налазимо $x = y$. Посматрајмо правоугле троуглове ADB и BCA.

$$\left.\begin{array}{r} AB = AB \\ x = y \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \overset{\text{УСУ}}{\Longrightarrow} \triangle ADB \cong \triangle BCA.$$

Из подударности следи $CA = DB$, а одатле и из $PA = PB$ следи $PA - CA = PB - DB$, односно $PC = PD$, што је и требало доказати.

Сл. 14

Домаћи задатак препуштамо да реши сам читалац.