Др Бранко Савић

ЈЕДАН ПОСТУПАК РАЗВИЈАЊА ФУНКЦИЈЕ У СТЕПЕНИ РЕД. СУМИРАЊЕ СТЕПЕНИХ РЕДОВА

У раду [5] уведен је један поступак развијања функција у степени ред. Циљ овог рада је да, на основу поступка развијања рационалне функције у степени ред, уведе појам проширеног збира степеног реда и бројног реда који из овога настаје за конкретну вредност променљиве.

1. Општа формула за одређивање коефицијената степеног реда

Функција $f(x)$ аналитичка у тачки $x = 0$ може се представити степеним редом

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, \tag{1}$$

где су коефицијенти a_i једнозначно одређени функцијом $f(x)$ помоћу формула

$$a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Извешћемо једну општу формулу за одређивање коефицијената степеног реда (1) која као посебан случај обухвата формулу (2).

Теорема. *Ако се функција $f(x)$ може представити степеним редом (1), тада за коефицијенте a_i $(i = 0, 1, \ldots)$ важи формула*

$$a_i = \frac{(i-k)!}{i!} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{i-k}} \frac{d^k R_{i-1}(x)}{dx^k}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

где је $R_{i-1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k$, а k је ма који цео број који задовољава услов $0 \leqslant k \leqslant i$.

Доказ. Ако се k пута $(0 \leqslant k \leqslant i)$ примени Лопиталово правило на десну страну једнакости $a_i = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_{i-1}(x)}{x^i}$, добиће се

$$a_i = \frac{1}{i(i-1)\cdots(i-k+1)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{i-k}} \frac{d^k R_{i-1}(x)}{dx^k},$$

што је на други начин записана формула (3). Овим је теорема доказана. ■

Последица 1. *За највеће k, тј. за $k = i$, из (3) се добија формула*

$$a_i = \frac{1}{i}\lim_{x\to 0} f^{(i)}(x) = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}.$$

Последица 2. *За најмањи k, тј. за $k = 0$, из (3) се добија формула*

$$a_i = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - S_{i-1}(x)}{x^i}, \quad S_{i-1}(x) = \sum_{k=0}^{i-1} a_k x^k. \tag{4}$$

Ако је функција $f(x)$, аналитичка у тачки $x = 0$, рационална,

$$f(x) = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_rx^r}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_sx^s}, \tag{5}$$

за коефицијенте a_i $(i = 0, 1, \dots)$ у (4) вреде формуле

$$a_0 = \frac{A_0}{B_0}, \quad a_i = \frac{1}{B_0}\Big(A_i - \sum_{k=1}^{i} B_k a_{i-k}\Big), \quad B_0 \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Заиста, формула (4) на основу (5) постаје

$$a_i = \lim_{x\to 0}\frac{A_0 + A_1x + \cdots + A_rx^r - (B_0 + B_1x + \cdots + B_sx^s)S_{i-1}(x)}{(B_0 + B_1x + \cdots + B_sx^s)x^i},$$

па ако се i пута примени Лопиталово правило на десну страну ове једнакости, добиће се формула (6).

Напомена 1. У раду [5] изведена је једна општија формула.

Пример 1. Функцију $f(x) = \dfrac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2}$ развити у степени ред.

Решење. На основу формуле (6) је

$$a_0 = 2, \quad a_1 = \frac{5}{6}, \quad a_2 = \frac{37}{6^2}, \quad \dots, \quad a_i = 1 + \frac{(-1)^i}{6^i}, \quad \dots,$$

па је

$$\frac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2} = \sum_{i=0}^{\infty}\Big[1 + \frac{(-1)^i}{6^i}\Big]\, x^i.$$

Пример 2. Функцију $f(x) = \ln(1 + 3x + 2x^2)$ развити у степени ред.

Решење. На основу формуле (6) је

$$f'(x) = \frac{3 + 4x}{1 + 3x + 2x^2} = \sum_{i=0}^{\infty}[(-1)^i(1 + 2^{i+1})]\, x^i,$$

и даље

$$\int f'(x)\, dx = \int \sum_{i=0}^{\infty}[(-1)^i(1 + 2^{i+1})]\, x^i\, dx,$$

односно

$$\ln(1+3x+2x^2)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1+2^{i+1}}{i+1}\,x^{i+1}+C.$$

Како је $f(0)=0$, то је $C=0$, па је $\ln(1+3x+2x^2)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{1+2^{i+1}}{i+1}\,x^{i+1}$.

Напомена 2. Формула (6) се може применити не само када су у (5) полиноми ма ког степена (степени се експлицитно и не појављују у формули (6)), већ и када се уместо ових полинома налазе степени редови (један или оба). Тако се, на пример, за функцију

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots}{1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots}=\frac{0+x+0\cdot x^2-\dfrac{x^3}{3!}+0\cdot x^4+\cdots}{1+0\cdot x-\dfrac{x^2}{2!}+0\cdot x^3+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots},$$

на основу формуле (6) добија

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots.$$

Пример 3. Функција $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ дефинисана је за свако x осим за $x=0$. Како је $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, узима се да је $f(0)=1$, па ако се функција e^x замени Маклореновим редом, добија се

$$f(x)=\frac{1}{1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^3}{4!}+\cdots},$$

а одавде, на основу формуле (6),

$$f(x)=1-\frac{1}{2}\frac{x}{1!}+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{30}\frac{x^4}{4!}+\cdots. \tag{a}$$

На основу формуле (2) бисмо имали

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots. \tag{b}$$

Бројеви $f(0)=B_0$, $f'(0)=B_1$, $f''(0)=B_2$, $f'''(0)=B_3$, $\ldots$, су Бернулијеви бројеви. Упоређивањем (a) и (b) добија се:

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_5=0,\quad B_6=\frac{1}{42},\ \ldots$$

Израчунавање Бернулијевих бројева помоћу извода је веома компликовано. И методом упоређивања би њихово израчунавање било веома тешко. Према томе, најпрактичније је применити формулу (6).

2. Један поступак сумирања степених редова

Коефицијенти C_i $(i = 0, 1, \ldots)$ у развоју

$$\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} B_i x^i} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i, \quad B_0 \neq 0,$$

једнозначно се одређују (на основу (6)) помоћу формула

$$C_0 = \frac{1}{B_0}, \quad C_i = -\frac{1}{B_0} \sum_{k=1}^{i} B_k C_{i-k}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Обрнуто, ако је дат ред $\sum\limits_{i=0}^{\infty} C_i x^i$, $C_0 \neq 0$, коефицијенти B_i $(i = 0, 1, \ldots)$ реда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} B_i x^i$ једнозначно се одређују помоћу формула

$$B_0 = \frac{1}{C_0}, \quad B_i = -\frac{1}{C_0} \sum_{k=1}^{i} C_k B_{i-k}, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Дефиниција. Нека је $s_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} C_i x^i$, $C_0 \neq 0$, и $S_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} B_i x^i$, $B_0 \neq 0$, где је

$$B_0 = \frac{1}{C_0}, \quad B_i = -\frac{1}{C_0} \sum_{k=1}^{n} C_k B_{i-k}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ако постоји $\lim S_n(x)$ и ако је $\lim S_n(x) \neq 0$, кажемо да је ред $\sum\limits_{i=0}^{\infty} C_i x^i$ S_a-збирљив и да његов S_a-збир износи

$$S_a(x) = \lim s_n(x) = \frac{1}{\lim S_n(x)}.$$

Ако је $\lim S_n(x) = 0$, ред $\sum\limits_{i=0}^{\infty} C_i x^i$ није S_a-збирљив.

Пример 4. Ред $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^i (i+1) x^i + \cdots$ је S_a-збирљив, и његов S_a-збир износи $S_a(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Овде је

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^i (i+1) x^i + \cdots .$$

На основу (7) је: $B_0 = 1$, $B_1 = 2$, $B_2 = 1$, $B_i = 0$ за $i \geqslant 3$, јер је (на основу (7))

$$B_i = -[(-1)^i (i+1) \cdot 1 + (-1)^{i-1} i \cdot 2 + (-1)^{i-2} (i-1) \cdot 1] = 0$$

за све $i \geqslant 3$, па је $S_n(x) = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2$, и даље, на основу дефиниције S_a-збирљивости,

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^i (i+1) x^i + \cdots = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1. \tag{8}$$

Напомена 3. При израчунавању коефицијената B_i $(i = 0, 1, \dots)$ на основу (7), степени променљиве се експлицитно и не појављују у овој формули, па за конкретне вредности променљиве степени ред прелази у бројни ред на који се може применити поступак S_a-збирљивости.

За $x = 1$ једнакост (8) постаје

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^i (i+1) + \cdots = \frac{1}{4}.$$

Пример 5. Ако ред $1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots$ употпунимо члановима који недостају, добиће се ред

$$1 - x + 0 \cdot x^2 + x^3 - x^4 + 0 \cdot x^5 + x^6 - x^7 + \cdots,$$

па је, на основу (7), $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $B_3 = B_4 = \cdots = 0$. Дакле,

$$S_a(x) = \frac{1}{1 + x + x^2},$$

и даље, за $x = 1$, $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + \cdots = \dfrac{1}{3}$.

Пример 6. Геометријски ред $1 + qx + q^2x^2 + \cdots + q^{i-1}x^{i-1} + \cdots$ је S_a-збирљив,

$$S_a(x) = 1 + qx + q^2x^2 + \cdots + q^{i-1}x^{i-1} + \cdots = \frac{1}{1 - qx}, \quad qx \neq 1.$$

На основу (7) је $B_0 = 1$, $B_1 = -q$, $B_i = 0$ за $i \geqslant 2$, па је $S_a(x) = \dfrac{1}{1 - qx}$, $qx \neq 1$.

Пример 7. Наћи збир реда

$$\frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^3}x - \frac{3}{2^4}x^2 - \cdots - \frac{3}{2^{i+2}}x^i - \cdots.$$

Решење. Ако дати ред напишемо у облику $\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{2^3}x\Big(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2^2} + \cdots\Big)$ (ред у загради је геометријски ред), то је

$$S_a(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2^3}x \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{2}} = \frac{\dfrac{1}{2} - x}{2 - x}, \quad x \neq 2.$$

Пример 8. Хармонијски ред $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ није S_a-збирљив. Дати ред настаје из реда

$$S_a(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{i+1}}{i+1} + \cdots$$

за $x = 1$. Како је

$$S_a'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}, \quad x \neq 1,$$

а одавде $S_a(x) = -\ln(1-x)$, $x < 1$, то је

$$S_a(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = -\lim_{x \to 1-0} \ln(1-x) = \infty.$$

Пример 9. Број $\dfrac{7}{5}$ представити у облику реда.

Решење. Ако $\dfrac{7}{5}$ напишемо, на пример, у бројном систему са основом 2,

$$\frac{7}{5} = \frac{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0},$$

и приметимо да је број $\dfrac{7}{5}$ вредност функције $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ за $x = 2$, то је

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1 + (x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^i x^{2i+1} + \cdots),$$

а за $x = 2$, $\dfrac{7}{5} = 1 + (2 - 2^3 + 2^5 - 2^7 + \cdots + (-1)^i 2^{2i+1} + \cdots)$.

Напомена 4. Збир реда $\sum a_i x^i$, односно $\sum a_i x_0^i$ ($x_0 = \text{const}$) уведен је преко границе $\dfrac{1}{\lim S_n(x)}$ ако ова гранична вредност постоји. Међутим, да би овако уведени појам збира (проширени збир) био потпуно основан, мора да се поклапа са стварним збиром реда ако овај постоји. Дефиниција S_a-збирљивости испуњава овај захтев, јер из једнакости

$$S_a(x) = \lim s_n(x) = \frac{1}{\lim S_n(x)}, \quad \lim S_n(x) \neq 0,$$

када ред $\sum a_i x^i$ конвергира, тј. када $s_n(x) \to s(x)$, тада је $S_a(x) = s(x)$.

Сваки конвергентан ред $\sum a_i x^i$ је S_a-збирљив са истим збиром.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Borel, *Leçons sur les series divergentes*, Paris, 1928.

[2] G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949.

[3] Ј. Карамата, *Развој и значај теорије дивергентних редова у математичкој анализи*, Први конгрес математичара и физичара ФНРЈ, 1951.

[4] M. Zamansky, *La sommation des series divergents*, Memorial des sciences mathematiques, No. 128, Paris, 1954.

[5] Б. Савић, *Један нови поступак одређивања коефицијената Тејлоровог реда*, Математички весник **1** (14)(29), Београд, 1977.