Др Владимир Јанковић

ЈЕДАН ФАНТАСТИЧАН ЗАДАТАК

Џон Конвеј (John Conway) из Принстона (Princeton) послао је овај задатак на многе адресе. Зоран Поп-Стојановић га је послао академику Милосаву Марјановићу. Задатак гласи:

Петар: Где си добио тај ружни полином $f(x)$ са тако много непознатих коефицијената. Изгледа ужасно.

Павле: То је полином са целобројним коефицијентима и један од његових корена је тачно број година моје ћерке Марије.

Петар: Било како било, изгледа мучно. Дај да израчунам $f(7)$. Нажалост, добио сам 77, а не нулу!

Павле: Ти не знаш колико је Марија стара, али она има више од 7 година.

Петар: Тада дај да покушам са годинама мог сина Јована. Гле, добих 85!

Павле: Пази Петре, Марија је старија него ли твој син.

Колико година је стар Јован, а колико Марија?

Џон Конвеј у коментару каже:

„Фантастичан проблем! Мислио сам да није дата потпуна информација да би се задатак решио, па сам врло пажљиво све податке морао да запишем математичким симболима, пре него што сам га решио. Ако могу да се мало нашалим, додао бих да полином уствари и не може имати баш много непознатих коефицијената.

Покушајте да га и ви решите!“

Конвејев задатак има необичну и атрактивну формулацију, и с обзиром да је Џон Конвеј веома угледан математичар, није никакво чудо што је задатак привукао пажњу наших математичара. Појавило се неколико лепих идеја о томе како да се реши овај проблем. Овде ће бити изложене те идеје.

Решење 1. Означимо бројеве година Јована и Марије са j и m. Услови задатка могу формално да се запишу на следећи начин:

$$f(m) = 0, \tag{1}$$

$$f(7) = 77, \tag{2}$$

$$f(j) = 85, \tag{3}$$

$$7 < j < m. \tag{4}$$

Из услова (2) следи да се полином f може представити у облику

$$f(x)=(x-7)\varphi(x)+77, \tag{5}$$

где је φ полином са целобројним коефицијентима. Услов (1) постаје

$$(m-7)\varphi(m)+77=0. \tag{6}$$

Следи да $m-7 \mid 77$. Цели бројеви већи или једнаки 9 који задовољавају овај услов су: 14, 18 и 84. Размотримо ова три случаја.

1. $m=14$. Из (6) следи да је $\varphi(14)=-11$. Зато се полином φ може представити у облику

$$\varphi(x)=(x-14)\psi(x)-11, \tag{7}$$

где је ψ полином са целобројним коефицијентима. Из (7) и (5) следи да је

$$f(x)=(x-14)[(x-7)\psi(x)-11]. \tag{8}$$

Услови (8) и (3) дају

$$(j-14)[(j-7)\psi(j)-11]=85. \tag{9}$$

Следи да $j-14 \mid 85$. Цели бројеви који задовољавају овај услов и услов (4) су: 9 и 13.

1.1. $j=9$. Из (9) следи да је $\psi(9)=-3$. Зато се полином ψ може представити у облику

$$\psi(x)=(x-9)\omega(x)-3, \tag{10}$$

где је ω полином са целобројним коефицијентима. Из (10) и (8) следи да је

$$f(x)=(x-14)(10-3x)+(x-7)(x-9)(x-14)\omega(x). \tag{11}$$

1.2. $j=13$. Из (9) следи да је $\psi(13)=-37/3$, а то је немогуће, јер је $\psi(13)$ цео број.

2. $m=18$. Из (6) следи да је $\varphi(18)=-7$. Зато се полином φ може представити у облику

$$\varphi(x)=(x-18)\psi(x)-7, \tag{12}$$

где је ψ полином са целобројним коефицијентима. Из (12) и (5) следи да је

$$f(x)=(x-18)[(x-7)\psi(x)-7]. \tag{13}$$

Услови (13) и (3) дају

$$(j-18)[(j-7)\psi(j)-7]=85. \tag{14}$$

Следи да $j-18 \mid 85$. Цели бројеви који задовољавају овај услов и услов (4) су: 13 и 17.

2.1. $j = 13$. Из (14) следи да је $\psi(13) = -5/3$, а то је немогуће, јер је $\psi(13)$ цео број.

2.2. $j = 17$. Из (14) следи да је $\psi(17) = -39/5$, што је такође немогуће, јер је $\psi(17)$ цео број.

3. $m = 84$. Из (6) следи да је $\varphi(84) = -1$. Зато се полином φ може представити у облику

$$\varphi(x) = (x-84)\psi(x) - 1, \tag{15}$$

где је ψ полином са целобројним коефицијентима. Из (15) и (5) следи да је

$$f(x) = (x-84)[(x-7)\psi(x) - 1]. \tag{16}$$

Услови (16) и (3) дају

$$(j-84)[(j-7)\psi(j) - 1] = 85. \tag{17}$$

Следи да $j - 84 \mid 85$. Цели бројеви који задовољавају овај услов и услов (4) су: 67, 79 и 83.

3.1. $j = 67$. Из (17) следи да је $\psi(67) = -1/15$, што је немогуће, јер је $\psi(67)$ цео број.

3.2. $j = 79$. Из (17) следи да је $\psi(79) = -2/9$, што је немогуће, јер је $\psi(79)$ цео број.

3.3. $j = 83$. Из (17) следи да је $\psi(83) = -21/19$, а и то је немогуће, јер је $\psi(83)$ цео број.

Према томе, добијамо да мора бити $j = 9$, $m = 14$, а полином f је облика (11). То значи да Јован има 9 а Марија 14 година. ■

Решење 2. Користићемо следећу лему:

Лема. *Ако је f полином са целобројним коефицијентима и ако су a и b цели бројеви, онда*

$$a - b \mid f(a) - f(b).$$

Доказ леме. Нека је

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Тврђење леме следи из

$$f(a) - f(b) = (a-b) \sum_{k=0}^{n} c_k (a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + b^{k-1}). \quad ■$$

Као и у првом решењу, означимо бројеве година Јована и Марије са j и m. Услови задатка своде се на (1), (2), (3) и (4).

Из услова (1), (2) и (3) помоћу претходне леме добијамо да

$$m - 7 \mid 77, \tag{18}$$

$$j - 7 \mid 8, \tag{19}$$

$$m - j \mid 85. \tag{20}$$

Из (18) и $m \geqslant 9$ добијамо да је m један од бројева: 14, 18 и 84. Из (19) и $j \geqslant 8$ добијамо да је j један од бројева: 8, 9, 11 и 15. Није тешко проверити да услове (4) и (20) задовољавају само $m = 14$ и $j = 9$.

Помоћу неке од интерполационих формула, или методом неодређених коефицијената, може да се одреди полином f другог степена који задовољава услове: $f(14) = 0$, $f(7) = 77$ и $f(9) = 85$. То је полином $f(x) = (x-14)(10-3x)$. Општи облик полинома који задовољава претходне услове дат је са (11). ■

У претходним решењима Конвејев задатак је преведен на формални математички језик и добијен је систем који се састоји од три једначине и две неједначине, а решава се по две целобројне и по једној полиномској непознатој. Пошто се ретко срећемо са оваквим системима интересантно је било наћи поступак којим се горњи систем може решити. У првом решењу врши се низ еквивалентних трансформација којима се стиже до решења. Решење није изложено експлицитно у таквој форми, али није тешко видети да се у њему управо тако решава разматрани систем. Друго решење је можда на први поглед атрактивније зато што је краће и некоме се може учинити да је за потребе решавања овог задатка смишљен један елегантан трик. Међутим, математичари који имају искуства у решавању задатака са целобројним полиномима знају да се многи задаци могу решити сличним поступком помоћу леме која је примењена у Решењу 2.

Добар математички задатак може да подстакне и на нека општија размишљања. У вези са Конвејевим задатком поставља се овакав проблем:

Дати су цели бројеви $x_0, x_1, \dots, x_n$ и $y_0, y_1, \dots, y_n$, такви да је $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$. Да ли постоји полином p са целобројним коефицијентима који задовољава услов $p(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \dots, n$?

Претпоставимо да такав полином p постоји. Ако га поделимо полиномом $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$:

$$p(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)q(x) + r(x),$$

количник $q(x)$ и остатак $r(x)$ ће такође бити полиноми с целобројним коефицијентима, зато што се дели полиномом чији је најстарији коефицијент делилац јединице. Полином $r(x)$ задовољава услов $r(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, и има степен мањи од n или је једнак нули. Тако се овај проблем своди на следећи:

Дати су цели бројеви $x_0, x_1, \dots, x_n$ и $y_0, y_1, \dots, y_n$, такви да је $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$. Да ли интерполациони полином $p(x)$ одређен условима $p(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, има целобројне коефицијенте?

Познати су разни облици интерполационог полинома, али је у овом случају најпогоднији Њутнов интерполациони полином са подељеним разликама, коме је посвећен један од чланака у овом броју Наставе математике. Следеће две теореме дају потпун одговор на овај проблем.

Теорема 1. *Нека је $p(x)$ полином са целобројним коефицијентима, и нека су $x_0, x_1, \dots, x_n$ различити цели бројеви. Тада је $p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ цео број.*

Доказ. Методом математичке индукције по n може се доказати да је $p(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ полином са целобројним коефицијентима. Тврђење теореме непосредно следи из ове чињенице. ■

Приметимо да се за $n = 1$ тврђење теореме своди на: $[p(x_1) - p(x_0)]/(x_1 - x_0)$ је цео број, тј. $x_1 - x_0 \mid p(x_1) - p(x_0)$. Зато је Теорема 1 уопштење Леме коришћене у Решењу 2.

ТЕОРЕМА 2. *Нека је $p(x)$ полином степена n и нека су $x_0, x_1, \dots, x_n$ различити цели бројеви. Коефицијенти полинома $p(x)$ су цели бројеви ако и само ако су подељене разлике $p(x_0), p(x_0, x_1), \dots, p(x_0, x_1, \dots, x_n)$ цели бројеви.*

Доказ. Тврђење теореме у једном смеру следи из претходне теореме, а у другом смеру из Њутнове интерполационе формуле с подељеним разликама:

$$p(x) = p(x_0) + p(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + \\ + p(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \quad ■$$

После ових разматрања можемо дати и треће решење проблема Конвејевог задатка.

РЕШЕЊЕ 3. Као и у првом решењу, означимо бројеве година Јована и Марије са j и m. Услови задатка своде се на (1), (2), (3) и (4). Према Теореми 2 постоји полином f са целобројним коефицијентима који задовољава услове (1), (2) и (3) ако и само ако су

$$\frac{77}{m-7}, \tag{21}$$

$$\frac{77}{(m-7)(j-7)} - \frac{85}{(m-j)(j-7)} \tag{22}$$

цели бројеви. Из $m - 7 \geqslant 2$ и $m - 7 \mid 77$ следи да је m један од бројева: 14, 18 и 84. Како је

$$\frac{85}{m-j} = \frac{77}{m-7} - (j-7)\left(\frac{77}{(m-7)(j-7)} - \frac{85}{(m-j)(j-7)}\right),$$

то $m - j \mid 85$. Размотрићемо три случаја.

1. $m = 14$. Из $0 < 14 - j < 7$ и $14 - j \mid 85$ добијамо да је $j = 9$. Непосредно се проверава да за $m = 14$ и $j = 9$ израз (22) има целобројну вредност.

2. $m = 18$. Из $0 < 18 - j < 11$ и $18 - j \mid 85$ добијамо да је $j = 13$ или $j = 17$. Непосредно се проверава да за $m = 18$ и $j = 13$ или $j = 17$ израз (22) нема целобројну вредност.

3. $m = 84$. Из $0 < 84 - j < 77$ и $84 - j \mid 85$ добијамо да је $j = 67$, $j = 80$ или $j = 84$. Непосредно се проверава да ако је $m = 84$ а $j = 67$, $j = 80$ или $j = 84$, тада израз (22) нема целобројну вредност.

Према томе, једино решење задатка је $m = 14$ и $j = 9$, тј. Марија има 14 а Јован 9 година. ■