Др Владимир Јанковић

ПОДЕЉЕНЕ РАЗЛИКЕ

У универзитетским курсевима алгебре проблем интерполације се решава помоћу Лагранжовог (Lagrange) интерполационог полинома. У курсевима нумеричке математике појављују се и неки други облици интерполационог полинома. У овом броју Наставе математике у чланку Један фантастичан задатак, један проблем алгебарског карактера се врло елегантно решава помоћу Њутновог интерполационог полинома са подељеним разликама. У уџбеницима нумеричке математике у којима се ови полиноми обрађују обично се акценат ставља на нумеричке проблеме који се помоћу њих решавају, а овде ћемо ставити акценат на алгебарски део теорије подељених разлика.

Дефиниција подељених разлика и њихова основна својства

Нека је f комплексна функција дефинисана на подскупу D скупа комплексних бројева. Под подељеном разликом функције f у тачки $x_0 \in D$ подразумевамо функцију $f(x_0, x)$ задату са

$$f(x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Очигледно је да је домен ове функције скуп $D \setminus \{x_0\}$. Ако је x_1 тачка из D различита од x_0, подељена разлика другог реда функције f у тачкама x_0 и x_1 дефинише се са

$$f(x_0, x_1, x) = \frac{f(x_0, x) - f(x_0, x_1)}{x - x_1}.$$

Према томе, подељена разлика другог реда функције f у тачкама x_0 и x_1 је подељена разлика у тачки x_1 подељене разлике у тачки x_0 функције f. Ова дефиниција може индуктивно да се продужи на подељене разлике произвољног реда на следећи начин: подељена разлика функције f у тачкама $x_0, x_1, \dots, x_n$ је подељена разлика у тачки x_n подељене разлике у тачкама $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ функције f, тј.

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)}{x - x_n}.$$

Домен подељене разлике функције f у тачкама $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ је скуп $D \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

Теорема 1.

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(x_j - x_i)}.$$

Доказ. За $n = 1$ тврђење теореме важи, зато што је

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Претпоставимо да је $n > 1$ и да тврђење важи за природан број $n - 1$. тада имамо да је

$$\begin{aligned}
(x_n - x_{n-1})&f(x_0, x_1, \dots, x_n)\\
&= f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})\\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_n)\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-2}(x_j - x_i)} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{n-1})\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-2}(x_j - x_i)} +\\
&\quad + \frac{f(x_n)}{\prod\limits_{i=0}^{n-2}(x_n - x_i)} - \frac{f(x_{n-1})}{\prod\limits_{i=0}^{n-2}(x_{n-1} - x_i)}\\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_j)}{(x_j - x_n)(x_j - x_{n-1})\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-2}(x_j - x_i)} +\\
&\quad + \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq n-1}}^{n}(x_{n-1} - x_i)} + \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)}\\
&= (x_n - x_{n-1})\sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}(x_j - x_i)},
\end{aligned}$$

одакле дељењем са $x_n - x_{n-1}$ добијамо да тврђење важи и за природан број n. ∎

Последица 1. *$f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ је симетрична функција.*

Подељене разлике полинома

Теорема 2. *Ако је $f(x)$ полином степена n, онда је $f(x_0, x)$ полином степена $n - 1$.*

Доказ. $f(x) - f(x_0)$ је полином степена n који је дељив полиномом $x - x_0$, јер се анулира у тачки x_0. Зато је $f(x_0, x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ полином степена $n - 1$. ∎

Последица 2. *Подељена разлика реда $n+1$ полинома степена n је полином идентички једнак нули.*

Њутнов интерполациони полином с подељеним разликама

Теорема 3.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + \cdots + \\ + f(x_0,x_1,\dots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + \\ + f(x_0,x_1,\dots,x_n,x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n). \end{aligned}$$

Доказ. На основу дефиниције подељене разлике имамо да је

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f(x_0,x)(x-x_0), \\ f(x_0,x) &= f(x_0,x_1) + f(x_0,x_1,x)(x-x_1), \\ f(x_0,x_1,x) &= f(x_0,x_1,x_2) + f(x_0,x_1,x_2,x)(x-x_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x) &= f(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n) + f(x_0,x_1,\dots,x_n,x)(x-x_n). \end{aligned}$$

Сабирањем прве једнакости помножене са 1, друге једнакости помножене са $x-x_0$, треће једнакости помножене са $(x-x_0)(x-x_1)$, итд, последње једнакости помножене са $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ и скраћивањем једнаких сабирака који се појављују на левој и десној страни, добијамо једнакост коју треба да докажемо. ■

Последица 3. *Вредност полинома*

$$f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + \cdots + f(x_0,x_1,\dots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

у тачки x_j, $j=0,1,\dots,n$, једнака је $f(x_j)$.

Последица 4. *Ако је f полином степена n, онда је*

$$f(x) = f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+\cdots+f(x_0,x_1,\dots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Формула из Теореме 3 назива се Њутнова интерполациона формула с подељеним разликама.