др Бранко Савић

УОПШТЕНИ АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗОВИ

Нека је

$$(1)\qquad (a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

низ реалних бројева. Од чланова низа (1), образовањем разлика по два узастопна члана, формирају се низови:

$(a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ \dots,\ a_{n+1} - a_n,\ \dots)$ прве разлике,
$(a_3 - 2a_2 + a_1,\ a_4 - 2a_3 + a_2,\ \dots,\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n,\ \dots)$ друге разлике,
$(a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1,\ \dots,\ a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n,\ \dots)$ треће разлике,

и, уопште, m-те разлике

$$(2)\qquad \left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}a_{m+1-i}, \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}a_{m+2-i}, \dots, \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}a_{m+n-i}, \dots\right).$$

Ако су m-те разлике (2) аритметички низ нултог реда (константан низ), онда је (1) аритметички низ m-тог реда.

Низ $(2, 2, \dots, 2, \dots)$ је аритметички низ нултог реда, низ $(2, 4, 8, 14, \dots n^2 - n + 2, \dots)$ аритметички низ другог реда, а низ $(2, 17, 82, \dots, n^4 + 1, \dots)$ аритметички низ четвртог реда.

Ако је (1) аритметички низ m-тог реда, познато је да је његов општи члан полином по n m-тог степена,

$$(3)\qquad a_n = B_0 + B_1 n + \dots + B_m n^m, \qquad B_0, B_1, \dots, B_m \in \mathbf{R}, \quad B_m \neq 0.$$

Циљ овог чланка је да се уведе један нов појам, појам низа збирова узастопних чланова низа (1). На пример, низ $(2, -1, 4, 1, 6, 3, \dots, n^2 - 1 + (-1)^n \cdot 2, \dots)$ није аритметички, а ни геометријски. Међутим, низ формиран од збирова по два узастопна члана овог низа је аритметички низ (првог реда) $(1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots)$. Низ $(3 \cdot 2^n + (-1)^n \cdot 5)$ није геометријски ни аритметички. Низ формиран од збирова по два узастопна члана овог низа је геометријски низ $(3^2 \cdot 2^n)$.

1. Уопштени аритметички низови

Од чланова низа (1), помоћу збирова по два узастопна члана, формирајмо низове:

$(a_1 + a_2,\ a_2 + a_3,\ \dots,\ a_n + a_{n+1},\ \dots\ )$ први збир,
$(a_1 + 2a_2 + a_3,\ a_2 + 2a_3 + a_4,\ \dots,\ a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2},\ \dots\ )$ други збир,
$(a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4,\ \dots,\ a_n + 3a_{n+1} + 3a_{n+2} + a_{n+3},\ \dots\ )$ трећи збир,

и, уопште, k-ти збир

$$\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_{1+i}, \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_{2+i}, \dots, \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_{n+i}, \dots\right). \tag{4}$$

Општи члан k-тог збира (4) означимо са A_n^k,

$$A_n^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_{n+i}. \tag{5}$$

Од чланова k-тог збира могу се формирати прве, друге, треће и опште m-те разлике,

$$\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}A_{m+1-i}^k, \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}A_{m+2-i}^k, \dots, \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}A_{m+n-i}^k, \dots\right). \tag{6}$$

Општи члан низа (6) означимо са $A_n^{k,m}$,

$$A_n^{k,m} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}A_{m+n-i}^k. \tag{7}$$

Дефиниција 1. Низ (1) је *уопштени аритметички низ реда* m_k ако m-те разлике његовог k-тог збира (4) формирају аритметички низ нултог реда.

Пример 1. Низ $(-2, 1, 3, 20, 73, \dots, n^4 + (-1)^n(2n+1), \dots)$ је уопштени аритметички низ реда 3_2.

Заиста, општи члан првог збира датог низа је

$$A_n^1 = a_n + a_{n+1} = 2n^3 + 3n^2 + 1 + (-1)^{n+1}\cdot 2,$$

а општи члан другог збира

$$A_n^2 = A_n^1 + A_{n+1}^1 = 4n^3 + 12n^2 + 8n + 10.$$

Општи члан другог збира је полином трећег степена, што значи да је други збир датог низа аритметички низ трећег реда. Према дефиницији 1, дати низ је уопштени аритметички низ реда 3_2.

Напомена. За коначан низ

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \qquad n \geqslant m + k + 2, \tag{8}$$

ако испуњева услове дефиниције 1, казаћемо да је *коначан уопштени аритметички низ реда* m_k.

Показаћемо да се низ (8) може допунити до бесконачног уопштеног аритметичког низа реда m_k.

Низ $(A_1^k, A_2^k, \dots, A_{n-k}^k, \dots, A_p)$, $p \geqslant n-k+m+2$, је k-ти збир низа (8), па је његов општи члан полином m-тог степена,

$$A_n^k = B_0 + B_1 n + \dots + B_m n^m, \qquad B_0, B_1, \dots, B_m \in \mathbf{R}, \quad B_m \neq 0. \tag{9}$$

За $n = 1, 2, \dots, m+1$, из (9) се добија систем једначина

$$\begin{aligned} B_0 + B_1 + B_2 + \dots + B_m &= A_1^k, \\ B_0 + 2B_1 + 2^2 B_2 + \dots + 2^m B_m &= A_2^k, \\ B_0 + 3B_1 + 3^2 B_2 + \dots + 3^m B_m &= A_3^k, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ B_0 + (m+1)B_1 + (m+1)^2 B_2 + \dots + (m+1)^m B_m &= A_{m+1}^k. \end{aligned} \tag{10}$$

за израчунавање коефицијената B_0, B_1, ... , B_m. Детерминанта система (10) је

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^m \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (m+1) & (m+1)^2 & \dots & (m+1)^m \end{vmatrix} = 1!\,2!\,3! \cdots (m+1)! \neq 0, \tag{11}$$

што значи да систем има јединствено решење.

Општи члан низа (8), допуњен до бесконачног уопштеног аритметичког низа реда m_k, на основу (5) је решење диференцне једначине

$$a_{n+k} + \binom{k}{1} a_{n+k-1} + \binom{k}{2} a_{n+k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} a_{n+1} + a_n = \\ = B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \dots + B_m n^m$$

са почетним условима: $a_1 = a_1^0$, $a_2 = a_2^0$, ... , $a_{m+1} = a_{m+1}^0$, где су a_1^0, a_2^0, ... , a_{m+1}^0 први чланови низа (8).

Пример 2. Зависност дужине спиралне опруге $d\,(\mathrm{cm})$, учвршћене на једном крају, од силе $F\,(\mathrm{N})$ која је истеже, дата је у следећој табели (добијеној експериментално).

$F\,(\mathrm{N})$	1	2	3	4	5	6
$d\,(\mathrm{cm})$	14,0	18,5	21,0	25,5	28,0	32,5

Методом најмањих квадрата, веза између силе F и дужине опруге d добијена је у облику формуле $d = 10{,}7 + 3{,}6F$, која даје приближне вредности дужине опруге. Извешћемо формулу

$$d = 11 + 3{,}5n + (-1)^n \cdot 0{,}5$$

која даје тачне вредности дужине d опруге.

Пођимо од низа вредности d из табеле

(a) $$(14{,}0;\ 18{,}5;\ 21{,}0;\ 25{,}5;\ 28{,}0;\ 32{,}5).$$

Први збир овог низа јесте низ

(b) $$(32{,}5;\ 39{,}5;\ 46{,}5;\ 53{,}5;\ 60{,}5).$$

Прва разлика првог збира (b) је низ нултог реда (7; 7; 7; 7), што значи да је низ (a) уопштени аритметички низ реда 1_1.

Општи члан првог збира (b) је полином првог степена

(c) $$A_n^1 = B_0 + B_1 n.$$

За $n = 1$, $n = 2$ и $A_1^1 = 14{,}0 + 18{,}5 = 32{,}5$; $A_2^1 = 18{,}5 + 21{,}0 = 39{,}5$, из (c) се добија систем једначина

$$B_0 + B_1 = 32{,}5, \qquad B_0 + 2B_1 = 39{,}5$$

чије је решење $B_0 = 25{,}5$, $B_1 = 7$, па је општи члан првог збира $A_n^1 = 25{,}5 + 7n$, односно, на основу (5) за $k = 1$,

(d) $$a_{n+1} + a_n = 25{,}5 + 7n.$$

Једначина (d) је диференцна једначина првог реда чије је опште решење

(e) $$a_n = 11 + 3{,}5n + (-1)^n D,$$

где је D произвољна константа коју треба одредити.

За $n = 1$ и $a_1 = 14{,}0$ (или за $n = 2$, $a_2 = 18{,}5, \ldots$) из (e) се добија $D = 0{,}5$, па је

$$d = 11 + 3{,}5n + (-1)^n \cdot 0{,}5 \qquad (a_n = d)$$

формула која даје тачне вредности дужине d опруге.

Пример 3. Одредити општи члан низа $(-2, 2, 0, 12, 10, 30, 28, 56, 54, 90, \ldots)$ који је уопштени аритметички низ реда 2_2.

Општи члан другог збира датог низа је полином другог степена $A_n^2 = B_0 + B_1 n + B_2 n^2$, $B_2 \neq 0$, па за $n = 1, 2, 3$ систем једначина

$$\begin{aligned} B_0 + B_1 + B_2 &= 2,\\ B_0 + 2B_1 + 4B_2 &= 14,\\ B_0 + 3B_1 + 9B_2 &= 34, \end{aligned}$$

има решење $B_0 = -2$, $B_1 = 0$, $B_2 = 4$, што значи да је $A_n^2 = 4n^2 - 2$, односно, на основу (5),

(f) $$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 4n^2 - 2.$$

Решење диференцне једначине (f), са почетним условима $a_1 = -2$ и $a_2 = 2$ је

$$a_n = n^2 - 2n + (-1)^n n,$$

што представља општи члан датог низа.

2. Уопштени геометријски низови

Дефиниција 2. Низ $a_n = aq^{n-1} + P_m(n)$, $a \in \mathbf{R}$, $P_m(n)$ реалан полином, је *геометријски низ* $(m+1)$*-ог реда* ако су његове $(m+1)$-ве разлике низ

$$(a(q-1)^{m+1}q^{n-1}). \tag{11}$$

Низ (11) је геометријски низ првог реда.

Пример 4. Низ (a_n), где је $a_n = 2\cdot 3^n - 2n - 1$, је геометријски низ другог реда. Општи члан прве разлике је

$$A_n^{1,1} = A_{n+1}^1 - A_n^1 = 2^2\cdot 3^n - 2,$$

а општи члан друге разлике

$$A_n^{1,2} = A_{n+1}^{1,1} - A_n^{1,1} = 2^3\cdot 3^n.$$

Друге разлике датог низа су, на основу дефиниције 2, геометријски низ првог реда $(2^3\cdot 3, 2^3\cdot 3^2, \dots, 2^3\cdot 3^n, \dots)$ па је дати низ геометријски низ другог реда.

Нека је

$$(a_n) = (aq^{n-1} + P_m(n) + (-1)^n Q_k(n)), \qquad a \in \mathbf{R}; \quad P, Q \text{ – реални полиноми}, \tag{12}$$

реалан низ. Општи члан његовог $(k+1)$-ог збира је

$$A_n^{k+1} = a(q+1)^{k+1}q^{n-1} + R_m(n),$$

а општи члан $(m+1)$-ве разлике $(k+1)$-ог збира је

$$A_n^{k+1,m+1} = a(q+1)^{k+1}(q-1)^{m+1}q^{n-1}.$$

Дефиниција 3. Низ (12) је *уопштени геометријски низ реда* m_k ако су $(m+1)$-ве разлике његовог $(k+1)$-вог збира геометријски низ првог реда.

Пример 4. Наћи општи члан низа $(0, 2, -4, 2, 34, 72, 200, 422, \dots)$ који је уопштени геометријски низ реда 3_2.

Трећа разлика другог збира је низ $(9\cdot 2, 9\cdot 2^2, \dots, 9\cdot 2^n, \dots)$. Решење једначине $A_n^{2,3} = 9\cdot 2^n$, односно, на основу (2), једначине

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\binom{3}{i}A_{n+3-i}^2 = 9\cdot 2^n$$

је $A_n^2 = 9\cdot 2^n - 6 - 8n - 4n^2$, одакле је на основу (5)

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 9\cdot 2^n - 6 - 8n - 4n^2. \tag{13}$$

Решење једначине (13) уз почетне услове $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ и $a_3 = -4$ гласи

$$a_n = 2^n - n^2 + (-1)^n n,$$

што представља тражени општи члан датог низа.