НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Милољуб Албијанић

ПРАВА У РАВНИ. ВЕКТОРСКИ ПРИСТУП

Вектори и аналитичка геометрија у средњој школи обрађују се као две одвојене тематске целине. Обрада ове теме је покушај да се наведене области природно приближе, да вектори нађу своју одговарајућу примену а будући студенти лакше прихвате теорију аналитичке геометрије у простору.

Основни дидактички задатак предавача треба да буде стално истицање геометријског значења констаната које фигуришу у разним облицима једначине праве. Наравно, често треба уз задатке цртати слике које интерпретирају њихов садржај.

1. Једначина праве у равни

1.1. Векторски облик једначине праве

Положај праве у равни је потпуно одређен ако је задата једна тачка M_0 праве и вектор $\vec{p}$ са којим је права паралелна. Тачком M_0 одређен је радијус-вектор $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$, а промењивој тачки M придружујемо радијус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, сл. 1. Сабирањем вектора биће

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}. \tag{1}$$

Вектори $\vec{p}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ су колинеарни па је $\vec{p}\cdot t = \overrightarrow{M_0M}$. Заменом у (1) вектора $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ и $\vec{p}\cdot t$ добијамо *векторски облик једначине праве*

$$L: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{p}\cdot t. \tag{2}$$

Сл. 1

Сл. 2

1.2. Параметарски облик једначине праве

Користећи Декартове координате записујемо: $M_0(x_0, y_0)$ – тачка праве L, $\vec{p} = l\,\vec{i} + m\vec{j} = (l, m)$[1]. Радијус-вектори имају координате $\vec{r}_0 = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} = (x_0, y_0)$, $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = (x, y)$, сл. 2. Векторски облик (2) написаћемо користећи координате вектора па је

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (l, m)t = (x_0, y_0) + (lt, mt) = (x_0 + lt, y_0 + mt).$$

На основу једнакости два вектора добијамо *параметарски облик једначине праве*

$$L: \quad \begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \end{aligned} \tag{3}$$

1.3. Канонски облик једначине праве

Из параметарског облика (3), сл. 3, следи

$$\begin{aligned} x - x_0 &= lt \\ y - y_0 &= mt, \end{aligned} \qquad \text{тј.} \qquad \begin{aligned} \frac{x - x_0}{l} &= t \\ \frac{y - y_0}{m} &= t \end{aligned}$$

па је *канонски облик једначине праве*

$$L: \quad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{4}$$

Сл. 3

Сл. 4

Ако је вектор правца $\vec{p}$ паралелан координатним осама, добијамо специјалне случајеве, сл. 4: 1° $m = 0$, $y = y_0$; 2° $l = 0$, $x = x_0$.

Дужина вектора правца праве L није од битног значаја. Међутим ако је $|\vec{p}| = 1$, тада је $\vec{p} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, где је α угао који вектор $\vec{p}$ заклапа са позитивним смером x-осе, сл. 5. Канонски облик једначине праве постаје

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

[1] Договорно ћемо уместо $a\,\vec{i} + b\vec{j}$ писати такође (a, b), знајући да је у питању вектор.

Сл. 5 Сл. 6

1.4. Општи облик једначине праве

Ако је задата једна тачка праве M_0 и нормални вектор $\vec{n}$, сл. 6, биће

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \tag{6}$$

($\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$). Векторима ћемо придружити одговарајуће координате, $\vec{n} = (A, B)$, па добијамо $(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0)$ и *општи облик једначине праве кроз једну тачку*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{7}$$

После множења добијамо $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$. Означимо $-Ax_0 - By_0 = C$, па је *општи облик једначине праве*

$$Ax + By + C = 0. \tag{8}$$

Напомена. 1) Превођење општег облика у канонски: $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$, $A(x - x_0) = -B(y - y_0)$,

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}, \tag{9}$$

где је $M_0(x_0, y_0)$ а $\vec{p} = (-B, A)$. Приметимо да је $\vec{n} \cdot \vec{p} = (A, B) \cdot (-B, A) = -AB + BA = 0$.

2) Превођење канонског облика у општи: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$, $m(x - x_0) = l(y - y_0)$, $m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0$,

$$m(x - x_0) + (-l)(y - y_0) = 0, \tag{10}$$

$\vec{n} = (m, -l)$, $\vec{n} \cdot \vec{p} = (m, -l) \cdot (l, m) = ml - lm = 0$.

Примери

1. Написати једначину праве која садржи тачку $(1, 2)$ и чији је вектор правца $\vec{p} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

Решење. $M_0(1, 2)$, $\vec{p} = (-1, 3)$, $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{m - m_0}{m}$, L: $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 2}{3}$.

2. Написати општи облик једначине праве која садржи тачку $(1, -2)$ чији је вектор правца $\vec{p} = (2, -3)$.

Решење. Написаћемо канонски облик (4) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}$ а овај облик ћемо претворити у општи: $-3(x-1)=2(y+2)$, $3(x-1)+2(y+2)=0$, $3x+2y+1=0$.

3. Дата је права $2x-3y+4=0$. Написати њен канонски облик.

Решење. Одредићемо једну тачку праве. Нека је, на пример, $y=2$; тада је $2x-6+4=0$, $x=1$, па је $M_0(1,2)$. Дату праву написаћемо у облику (7) $2(x-1)-3(y-2)=0$, $2(x-1)=3(y-2)$, $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}$.

4. Наћи једначину праве која садржи две дате тачке (x_1,y_1) и (x_2,y_2).

Решење. Вектор правца праве L је $\vec{p}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, сл. 7, па је на основу (4) *једначина праве кроз две тачке*

(11)
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Сл. 7 Сл. 8

5. Написати једначину праве која садржи тачке $(-2,2)$ и $(1,-5)$.

Решење. $\vec{p}=(1-(-2),-5-2)=(3,-7)$, $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-2}{-7}$.

2. Растојање тачке од праве

Дата је права L у општем облику $Ax+By+C=0$ и тачка $P(x_1,y_1)$ ван праве L, сл. 8. Нормални вектор праве L је $\vec{n}=(A,B)$ а једна тачка праве је, на пример, за $x=0$, $y=-\dfrac{C}{B}$ $(B\neq 0)$. Дакле, $S\left(0,-\dfrac{C}{B}\right)$. Нека је тачка T пројекција тачке P на праву L. Растојање тачке P од праве L је заправо апсолутна вредност скаларне пројекције вектора $\overrightarrow{SP}$ на вектор $\vec{n}$,

$$d=|\overrightarrow{TP}|=\left|\frac{\overrightarrow{SP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{Ax_1+B(y_1+\frac{C}{B})}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|,$$

па је *растојање тачке P од праве L*

(12)
$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Примери

1. Наћи растојање тачке $M(1,2)$ од праве $x-y-4=0$.

Решење. $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|1-2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

2. Наћи растојање између паралелних правих L_1: $5x-12y+28=0$ и L_2: $5x-12y+15=0$.

Решење. Наћи ћемо једну тачку праве L_1, сл. 9. Нека је, рецимо, $x=4$, $5\cdot 4-12y+28=0$, $y=4$, па је једна тачка праве L_1: $P_1(4,4)$. Растојање правих L_1 и L_2 једнако је растојању тачке P_1 од праве L_2:

$$d=\frac{|5\cdot 4-12\cdot 4+15|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{13}{\sqrt{169}}=1.$$

Сл. 9

Сл. 10

3. Две праве

3.1. Услов пресека две праве

Дате су праве L_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ и L_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$. Решавајући систем добијамо, $\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$:

1° ако је $\Delta\neq 0$, систем има јединствено решење дато Крамеровим формулама $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, где је $\Delta_x=\begin{vmatrix} -C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}$. У геометријском смислу две праве се секу у једној тачки. Дакле, *услов пресека правих* L_1 и L_2 је

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0. \tag{13}$$

2° $\Delta=0$.

2.1° $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$. Систем нема решења а праве су паралелне.

2.2° $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$. Систем има бесконачно много решења а праве се поклапају.

3.2. Угао између две праве

Нека су дате праве L_1: $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1}$, L_2: $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2}$, сл. 10. Угао између L_1 и L_2 је заправо угао између вектора праваца $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. На основу дефиниције скаларног производа је $\cos\angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \dfrac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2|}$ па добијамо да је *угао између две праве*

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \tag{14}$$

Специјално,

1) праве су нормалне ако и само ако важи *услов нормалности*

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0; \tag{15}$$

2) праве су паралелне ако и само ако важи *услов паралелности*

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \tag{16}$$

Напомена 1. Ако су праве у општем облику, L_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, L_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, онда је угао између L_1 и L_2 једнак углу између нормалних вектора а (14), (15) и (16) постају

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{17}$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \tag{18}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{19}$$

Сл. 11 Сл. 12 Сл. 13

Напомена 2. Ако је једна права у канонском а друга у општем облику, L_1: $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m}$, L_2: $Ax + By + C = 0$, сл. 11, тада је $\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi) = \cos(\vec{p}, \vec{n}) = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{|\vec{p}|\,|\vec{n}|}$, па је *угао између две праве*

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{l^2 + m^2}}, \tag{20}$$

услов паралелности (због $\vec{n}\cdot\vec{p} = 0 \iff \vec{n} \perp \vec{p}$, сл. 12)

$$Al + Bm = 0, \tag{21}$$

а *услов нормалности* (јер су вектори $\vec{n}$ и $\vec{p}$ паралелни ако и само ако $\vec{n} = \lambda \vec{p}$, сл. 13)

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m}. \tag{22}$$

Примери.

1. Написати једначину праве која пролази кроз координатни почетак и паралелна је са правом $y = 2x + 3$.

Решење. Дата права је $-2x + y - 3 = 0$, па је за тражену праву $\vec{n} = (-2, 1)$ и њена једначина је $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, $-2(x - 0) + 1(y - 0) = 0$, $-2x + y = 0$, $y = 2x$.

2. Написати једначину праве која садржи тачку пресека правих L_1: $x - y - 3 = 0$, L_2: $2x + 3y - 11 = 0$ а паралелна је са правом L_3: $3x - 4y - 17 = 0$.

Решење. Решавањем система $x - y - 3 = 0$, $2x + 3y - 11 = 0$ добијамо пресечну тачку $(x_0, y_0) = (4, 1)$ правих L_1 и L_2. Тражена права има једначину $5(x - 4) - 4(y - 1) = 0$, тј. $5x - 4y - 16 = 0$, сл. 14.

Сл. 14

Сл. 15

3. Написати једначину праве која пролази кроз тачку пресека правих L_1: $3x - y - 3 = 0$, L_2: $4x + 3y - 4 = 0$ и нормална је на L_1.

Решење. Решавањем система $3x - y - 3 = 0$, $4x + 3y - 4 = 0$ добијамо пресечну тачку $(x_0, y_0) = (1, 0)$ правих L_1 и L_2. Примећујемо да је нормални вектор $\vec{n}_1$ заправо вектор правца праве L, сл. 15, $\vec{p} = \vec{n}_1 = (3, -1)$, па је тражена једначина праве $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y}{-1}$, односно $x + 3y - 1 = 0$.

4. Одредити једначину праве која садржи пресечну тачку правих L_1: $x + 7y - 12 = 0$, L_2: $2x - y + 6 = 0$ и тачку $A(8, -4)$.

Решење. Пресечна тачка $P(-2, 2)$ добија се решавањем система $x + 7y - 12 = 0$, $2x - y + 6 = 0$. Тражена права садржи тачке $A(8, -4)$ и $P(-2, 2)$, па на основу формула (11) њена једначина гласи $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$, $\dfrac{x + 2}{10} = \dfrac{y - 2}{-6}$, односно $3x + 5y - 4 = 0$.

5. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(1, 2)$ и нормална је на праву L_1: $2x + 3y - 1 = 0$, сл. 16.

Решење. $\vec{p} = \vec{n}_1 = (2, 3)$, $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{3}$, $3x - 2y + 1 = 0$.

Сл. 16 Сл. 17

6. Наћи тачку симетричну тачки $P(-5,13)$ у односу на праву L_1: $2x-3y-3=0$, сл. 17.

Решење. Једначина праве N која садржи тачку P и нормална је на L_1 гласи $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-13}{-3}$, односно $3x+2y-11=0$. Пресечна тачка правих N и L_1 добија се решавањем система једначина $3x+2y-11=0$, $2x-3y-3=0$ и то је тачка $S(3,1)$. На основу једнакости вектора $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{SR}$ је $(8,-12)=(s-3,t-1)$, тј. $8=s-3$, $-12=t-1$, одакле је $s=11$, $t=-11$ и $R(11,-11)$.

4. Угаони коефицијент

Нека је L: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$, где је $\vec{p}=(l,m)$ вектор правца а $M_0(x_0,y_0)$ једна тачка праве L. Вектор $\vec{p}$ напишимо у облику $\vec{p}=(l,m)=l\,(1,\frac{m}{l})$. Нека је $\vec{p}_1=(1,\frac{m}{l})=(1,k)$, где $k=\frac{m}{l}$. Вектор $\vec{p}_1$ такође је вектор правца праве L па је L: $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{k}$, тј. *једначина праве кроз једну тачку* се може написати у облику

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{23}$$

Из примера 4 (формула (11)) се *једначина праве кроз две тачке* $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y-y_2}$ може написати као

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \tag{24}$$

На основу формуле (5) је $\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\sin\alpha}$, где је α угао који права гради са x-осом. Ту је $\vec{p}=(\cos\alpha,\sin\alpha)=\cos\alpha\,(1,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})$, $\vec{p}_1=(1,\operatorname{tg}\alpha)$, па је једначина праве $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\operatorname{tg}\alpha}$, тј. $y-y_0=\operatorname{tg}\alpha\,(x-x_0)$, где је *угаони коефицијент*

$$k=\operatorname{tg}\alpha. \tag{25}$$

Ако су дате две праве L_1: $\dfrac{x-x_1}{1}=\dfrac{y-y_1}{k_1}$ и L_2: $\dfrac{x-x_2}{1}=\dfrac{y-y_2}{k_2}$, *услов нормалности* је $(1,k_1)\cdot(1,k_2)=0$, тј. $1+k_1k_2=0$, односно

$$k_1k_2=-1, \tag{26}$$

а *услов паралелности* је $\dfrac{1}{1}=\dfrac{k_1}{k_2}$, тј.

$$k_2=k_1. \tag{27}$$