Јасминка Михаљинац

БРОЈНИ СИСТЕМИ

„ . . . Рећи ћу вам људску недаћу.
Као деца били су глупи.
Ја сам им уделио мисли и сазнања . . .
и због њих сам смислио науку бројева,
као најважнију од свих наука . . . “
Есхил: „Оковани Прометеј“

Бројни системи су језици над скупом цифара. Имају своју азбуку (непразан скуп цифара) и граматику (правила) којима се конструишу сложене категорије (бројеви).

Сви познати бројни системи могу се поделити у две основне групе: позициони и непозициони.

1. Непозициони бројни системи

Цифре оваквих система исказују увек исту вредност, без обзира на ком месту се налазе у броју. Типичан пример оваквог система је нама свима познати римски бројни систем. Његове цифре су следеће:

I, V, X, L, C, D и M

и имају декадне вредности: 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000.

Правила за писање и читање бројева, састављених од римских цифара, могу се исказати на следећи начин:

- низ истих цифара у броју представља вредност једнаку њиховом збиру, на пример: III има вредност 3; XX има вредност 20.
- две цифре од којих се мања налази лево од веће, представљају вредност једнаку разлици веће и мање, на пример: IV има вредност 4; CM има вредност 900.
- две цифре од којих се мања налази десно од веће, представљају вредност једнаку збиру веће и мање, на пример: VIII има вредност 8; XVI има вредност 16; MD има вредност 1500.

Историјски гледано прво су се појавили оваки бројни системи. Римски бројни систем користи се за обележавање (спратова, поглавља у књигама, . . .) али не и у математици. Јасно је да би било напорно извођење аритметичких операција са римским бројевима као и записивање великих бројева, због тога се овај систем није ни развио у том смеру већ је ту улогу преузео позициони бројни систем.

2. Позициони бројни системи

Ови бројни системи имају непразан скуп цифара који чини њихову азбуку $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Број N цифара азбуке зовемо основом система. Цифре позиционих бројних система у броју дају вредност у зависности од места (позиције) на коме се налазе (лево од децималног зареза позиције су 0, 1, 2, ... а десно су −1, −2, ...).

Вредност сваке цифре зависи од њене *вредности* и *њене позиције* у броју. Вредност појединe позиције (места) у броју назива се позициона вредност. Све позиционе вредности у једном броју једнаке су узастопним вредностима степена основе бројног система.

Бројеви се пишу као низ цифара, а вредност броја се добија као збир производа цифре и позиционе вредности (основе степеноване позицијом).

Вредност броја X у позиционом бројном систему основе N, који има $p+1$ цело место и m разломљених, можемо написати на следећи начин у облику полинома:

$$X_N = x_p N^p + x_{p-1} N^{p-1} + \cdots + x_1 N^1 + x_0 N^0 + x_{-1} N^{-1} + \cdots + x_{-m} N^{-m}$$

или у скраћеном облику:

$$X_N = \sum_{i=-m}^{p} x_i N^i,$$

где су x_i цифре азбуке датог бројног система.

Нама најпознатији позициони бројни систем је *декадни*, док се у рачунарству користе: *бинарни*, *октални* и *хексадекадни*.

1. Декадни бројни систем. Декадни бројни систем је систем чија је азбука $\{0, 1, \ldots, 9\}$, па је основа система $N = 10$. Броји се: 0, 1, ... , 9, 10, 11, ... , 99, 100, ... Када се на највећу цифру 9 дода 1 добија се 10 као најмањи двоцифрени број; када се на највећи двоцифрени број 99 дода 1 добија се најмањи троцифрени број. Декадни број пишемо као низ цифара, а вредност израчунавамо као збир производа цифре и основе 10 степеноване позицијом. На пример, код броја

$$4564.52 = 4{*}10^3 + 5{*}10^2 + 6{*}10^1 + 4{*}10^0 + 5{*}10^{-1} + 2{*}10^{-2}$$

(где су позиционе вредности: 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}) цифра 4 се два пута појављује у броју са два различита доприноса: први пут на месту хиљада па је њен допринос 4000 ($= 4{*}1000$), а други пут на месту јединица па је њен допринос 4 ($= 4{*}10^0$).

2. Бинарни бројни систем. Бинарни бројни систем је систем чија је основа $N = 2$, азбука $A = \{0, 1\}$ и броји се по истом принципу (када се на највећу цифру 1 дода 1 добија се 10 као најмањи двоцифрени број; када се на највећи двоцифрени број 11 дода 1 добија се најмањи троцифрени број 100, ...):

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, \ldots$$

Бинарни број записујемо као

$$X_2 = x_p 2^p + x_{p-1} 2^{p-1} + \cdots + x_1 2^1 + x_0 2^0 + x_{-1} 2^{-1} + \cdots + x_{-m} 2^{-m}$$

(где су позиционе вредности: 2^p, 2^{p-1}, ...).

Пример 1. Бинарни број $(101101,011)_2$ написан у облику полинома изгледа:

$$(101101,011)_2 = 1{*}2^5+0{*}2^4+1{*}2^3+1{*}2^2+0{*}2^1+1{*}2^0+0{*}2^{-1}+1{*}2^{-2}+1{*}2^{-3}.$$

Када израчунамо вредност овог израза, по правилима рачунања која владају у декадном бројном систему, добићемо декадну вредност бинарног броја, тј $(101101,011)_2 = (45,375)_{10}$.

На овај начин можемо израчунати декадну вредност било ког бинарног броја. Ово је у исто време и поступак за превођење (конверзију) бинарног броја у декадни.

С обзиром да има само две цифре, којима са може означити стање многобројних физичких елемената, бинарни бројни систем се доста користи приликом конструкција, израде и коришћења рачунара и других дигиталних постројења.

Пример 2. Преведимо неке бинарне бројеве:

$$(10)_2 = 1{*}2^1+0{*}2^0 = (2)_{10} \qquad (101)_2 = 1{*}2^2+0{*}2^1+1{*}2^0 = 4+1 = (5)_{10}$$
$$(11)_2 = 1{*}2^1+1{*}2^0 = 2+1 = (3)_{10} \qquad (110)_2 = 1{*}2^2+1{*}2^1+0{*}2^0 = 4+2 = (6)_{10}$$
$$(100)_2 = 1{*}2^2+0{*}2^1+0{*}2^0 = 4 = (4)_{10} \qquad (111)_2 = 1{*}2^2+1{*}2^1+1{*}2^0 = 4+2+1 = (7)_{10}$$

3. Октални бројни систем. Октални бројни систем је систем чија је основа $N=8$, азбука $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ и броји се по истом принципу (када се на највећу цифру 7 дода 1 добија се 10 као најмањи двоцифрени број; када се на највећи двоцифрени број 77 дода 1 добија се најмањи троцифрени број 100, ...): 0,1,2,3,4,5,6,7,10,11, ... ,17,20,21, ... ,27,30,31, ... ,77,100,101, ... , 107,110, ... ,777,1000, ... Октални број пишемо:

$$X_8 = x_p 8^p + x_{p-1}8^{p-1} + \cdots + x_1 8^1 + x_0 8^0 + x_{-1}8^{-1} + \cdots + x_{-m}8^{-m}$$

(где су позиционе вредности: 8^p, 8^{p-1}, ...).

Пример 3. Октални број $(71301,2)_8$ написан у облику полинома изгледа:

$$(71301,2)_8 = 7{*}8^4+1{*}8^3+3{*}8^2+0{*}8^1+1{*}8^0+2{*}8^{-1},$$

када израчунамо вредност овог израза, по правилима рачунања која владају у декадном бројном систему, добићемо декадну вредност бинарног броја, тј.

$$(71301,2)_8 = 7{*}4096+1{*}512+3{*}64+0{*}8+1{*}1+1{*}8^{-1} = (29377,25)_{10}.$$

Ово је у исто време и поступак за превођење окталног броја у декадни.

Пример 4. Преведимо неке окталне бројеве:

$$(10)_8 = 1{*}8^1+0{*}8^0 = 8+0 = (8)_{10} \qquad (27)_8 = 2{*}8^1+7{*}8^0 = 16+7 = (23)_{10}$$
$$(11)_8 = 1{*}8^1+1{*}8^0 = 8+1 = (9)_{10} \qquad (30)_8 = 3{*}8^1+0{*}8^0 = 24+0 = (24)_{10}$$
$$(12)_8 = 1{*}8^1+2{*}8^0 = 8+2 = (10)_{10} \qquad (77)_8 = 7{*}8^1+7{*}8^0 = 56+7 = (63)_{10}$$
$$(17)_8 = 1{*}8^1+7{*}8^0 = 8+7 = (15)_{10} \qquad (100)_8 = 1{*}8^2+0{*}8^1+0{*}8^0 = 64+0+0 = (64)_{10}$$
$$(20)_8 = 2{*}8^1+0{*}8^0 = 16+0 = (16)_{10} \qquad (777)_8 = 7{*}8^2+7{*}8^1+7{*}8^0 = 448+56+7 = (511)_{10}$$

4. Хексадекадни бројни систем. Хексадекадни бројни систем је систем чија је основа $N=16$, азбука $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$ и броји се по истом принципу (када се на највећу цифру F дода 1 добија се 10 као најмањи двоцифрени број; када се на највећи двоцифрени број FF дода 1 добија се најмањи троцифрени број $100, \dots$): $0, 1, 2, \dots, 9, A, B, \dots, F, 10, 11, \dots, 1F, 20, 21, \dots, 2F, 30, 31, \dots, FF, 100, 101, \dots, 10F, 110, \dots, FFF, 1000, \dots$ Хексадекадни број пишемо:

$$X_{16} = x_p 16^p + x_{p-1} 16^{p-1} + \cdots + x_1 16^1 + x_0 16^0 + x_{-1} 16^{-1} + \cdots + x_{-m} 16^{-m}$$

(где су позиционе вредности: 16^p, 16^{p-1}, $\dots$).

Да би се хексадекадне цифре веће од 9 изразиле једним знаком договорено је да се за хексадекадне цифре од 10 до 15 узму слова абецеде од A до F тј.

$$\begin{aligned} &(A)_{16} = (10)_{10}, \quad (B)_{16} = (11)_{10}, \quad (C)_{16} = (12)_{10}, \\ &(D)_{16} = (13)_{10}, \quad (E)_{16} = (14)_{10}, \quad (F)_{16} = (15)_{10}. \end{aligned}$$

Пример 5. Хексадекадни број $(91FC5, F2)_{16}$ написан у облику полинома има следећи изглед:

$$(91FC5, F2)_{16} = 9{*}16^4 + 1{*}16^3 + F{*}16^2 + C{*}16^1 + 5{*}16^0 + F{*}8^{-1} + 2{*}16^{-2}.$$

Када израчунамо вредност овог израза, по правилима рачунања која владају у декадном бројном систему, добићемо декадну вредност бинарног броја, тј.

$$\begin{aligned} (91FC5, F2)_{16} = 9{*}65535 &+ 5096 + 15{*}256 + 12{*}16 + 5{*}1 \\ &+ 15{*}1/16 + 2{*}1/16^2 = (597957, 95)_{10}. \end{aligned}$$

Ово је у исто време и поступак за превођење (конверзију) хексадекадног броја у декадни.

Пример 6. Преведимо неке хексадекадне бројеве:

$$\begin{aligned} &(10)_{16} = 1{*}16^1 + 0{*}16^0 = 16 + 0 = (16)_{10}, \qquad (20)_{16} = 2{*}16^1 + 0{*}16^0 = 32 + 0 = (32)_{10} \\ &(11)_{16} = 1{*}16^1 + 1{*}16^0 = 16 + 1 = (17)_{10}, \qquad (2F)_{16} = 2{*}16^1 + F{*}16^0 = 32 + 15 = (47)_{10} \\ &(1A)_{16} = 1{*}16^1 + A{*}16^0 = 16 + 10 = (26)_{10}, \qquad (30)_{16} = 3{*}16^1 + 0{*}16^0 = 48 + 0 = (48)_{10} \\ &(1F)_{16} = 1{*}16^1 + F{*}16^0 = 16 + 15 = (31)_{10}, \qquad (FF)_{16} = F{*}16^1 + F{*}16^0 = 240 + 15 = (255)_{10} \\ &(100)_{16} = 1{*}16^2 + 0{*}16^1 + 0{*}16^0 = 256 + 0 + 0 = (256)_{10} \\ &(101)_{16} = 1{*}16^2 + 0{*}16^1 + 1{*}16^0 = 256 + 0 + 1 = (257)_{10} \end{aligned}$$

5. Превођење. Видели смо како се пишу бројеви у бинарном, окталном и хексадекадном бројном систему и како се преводе у декадне бројеве. Сада ћемо се позабавити обрнутим поступком, како се декадни број преводи у бинарни, октални и хексадекадни.

Поступак за превођење бројева из једне основе у другу има два дела:

1) превођење целог дела броја,
2) превођење разломљеног дела броја.

1) Превођење целог дела броја реализује се узастопним дељењем основом у коју преводимо, водећи рачуна о остатку дељења.

Нека цео број $(X)_{N_1} = x_k x_{k-1} \dots x_2 x_1 x_0$ има запис

$$(X)_{N_2} = y_p y_{p-1} \dots y_2 y_1 y_0$$

у основи N_2. Поделимо ли овај запис са N_2 добиће се цео део количника $y_p y_{p-1} \dots y_2 y_1$ и остатак y_0. Остатак је цифра броја у који преводимо на 0-тој позицији, а цео део количника је број над којим настављамо деобу тако да у следећем кораку добијамо цифру на 1-ој позицији итд. док количник не буде 0.

Пример 7. Превести број $(327)_{10}$ у број система са основом 2.

$327 : 2 = 163$ и остатак 1 (1 – цифра на 0-тој позицији)

$163 : 2 = 81$ и остатак 1 (1 – цифра на 1-вој позицији)

$81 : 2 = 40$ и остатак 1 (1 – цифра на 2-гој позицији)

$40 : 2 = 20$ и остатак 0 (0 – цифра на 3-ћој позицији)

$20 : 2 = 10$ и остатак 0 (0 – цифра на 4-тој позицији)

$10 : 2 = 5$ и остатак 0 (0 – цифра на 5-тој позицији)

$5 : 2 = 2$ и остатак 1 (1 – цифра на 6-тој позицији)

$2 : 2 = 1$ и остатак 0 (0 – цифра на 7-мој позицији)

$1 : 2 = 0$ и остатак 1 (1 – цифра на 8-мој позицији),

па је $(327)_{10} = (101000111)_2$.

Овај поступак се може представити таблицом:

327	163	81	40	20	10	5	2	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1

при чему се резултат чита у смеру здесна улево.

2) Превођење разломљеног дела броја реализује се сукцесивним множењем основом у коју преводимо водећи рачуна о целом делу производа.

Нека разломљени број $(X)_{N_1} = 0, x_{-1}x_{-2} \dots x_{-m}$ има запис

$$(X)_{N_2} = 0, y_{-1}y_{-2} \dots y_{-p}$$

у основи N_2. Множењем овог записа са N_2 добија се цео део производа y_{-1} (који представља преведену цифру на -1-вој позицији) и разломљени део $0, y_{-2} \dots y_{-p}$ над којим настављамо поступак (добијајући цифре на -2-гој, -3-ћој ... позицији). Превођењем коначних разломљених бројева некада се не може добити коначан превод па се овај поступак прекида када се достигне захтевана тачност.

Пример 8. Превести број $(0,84375)_{10}$ у број у систему са основом 8.

$0,84375*8 = 6,75 = 0,75 + 6$ (6 – цифра на -1-вој позицији)

$0,75*8 = 6,00 = 0,00 + 6$ (6 – цифра на -2-гој позицији),

па је $(0,84375)_{10} = (0,66)_8$.

Пример 9. Превести број $(0,4)_{10}$ у број у систему са основом 16.

$0,4*16 = 6,4 = 0,4 + 6$ (6 – цифра на -1-вој позицији)

$0,4*16 = 6,4 = 0,4 + 6$ (6 – цифра на -2-гој позицији),

и тако даље до жељене тачности, па је $(0,4)_{10} = (0,66\dots)_{16}$.

За превођење мешовитог броја потребно је посебно превести цео део и разломљени део, па преводе сабрати.

Пример 10. Превести број $(67,875)_{10}$ у: а) бинарни; б) октални; в) хексадекадни бројни систем.

Урадићемо пример под а) и в), док случај б) препуштамо читаоцу.

а) Превод за целобројни део
$67 : 2 = 33$, остатак 1
$33 : 2 = 16$, остатак 1
$16 : 2 = 8$, остатак 0
$8 : 2 = 4$, остатак 0
$4 : 2 = 2$, остатак 0
$2 : 2 = 1$, остатак 0
$1 : 2 = 0$, остатак 1
$(67)_{10} = (1000011)_2$
Превод за разломљени део
$0,875*2 = 1,75 = 0,75 + 1$ – цео део 1
$0,75*2 = 1,5 = 0,5 + 1$ – цео део 1
$0,5*2 = 1,0 = 0,0 + 1$ – цео део 1
$(0,875)_{10} = (0,111)_2$
Резултат је:
$(67\quad\;\;)_{10} = (1000011,000)_2$
$(\;\;0,875)_{10} = (\qquad\quad 0,111)_2$
$(67,875)_{10} = (1000011,111)_2$

в) Превод за целобројни део
$67 : 16 = 4$, остатак 3
$4 : 16 = 0$, остатак 4
$(67)_{10} = (43)_{16}$
Превод за разломљени део
$0,875*16 = 14,0 = 0,0 + 14$ – цео део E
$(0,875)_{10} = (0,E)_{16}$
Резултат је:
$(67\quad\;\;)_{10} = (43,0)_{16}$
$(\;\;0,875)_{10} = (\;\;0,E)_{16}$
$(67,875)_{10} = (43,E)_{16}$

6. Кодирање. Рачунари који раде у бинарном бројном систему извршавају операције над бројним подацима који су са одређеном тачношћу преведени. Ово не представља посебан проблем за научно-техничку примену рачунара (рачуна се са унапред задатом тачношћу) али је крупан недостатак за пословну примену рачунара. Зато се уводи бинарно-кодирани систем.

Нека је X, у бројном систему са основом N_1, записан у облику $(X)_{N_1} = x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} \ldots x_{-m}$, где су x_i, $i = -m, -m+1, \ldots, n$ цифре бројног система са основом N_1. За позициони систем са основом N_1 каже се да је кодиран позиционим системом са основом N_2 ако све цифре броја X изразимо помоћу цифара бројног система са основом N_2, тако да је $x_k = y_{k,p} y_{k,p-1} \cdots y_{k,1} y_{k,0}$ (број p одређује се из услова да највећа цифра у бројном систему са основом N_1 буде записана у овом облику), где су $y_{k,i}$, $i = 0, 1, \ldots, p$ цифре бројног система са основом N_2, па имамо

$$(X)_{N_1} = (y_{n,p} \ldots y_{n,0}\; y_{n-1,p} \ldots y_{n-1,0}\; \ldots\;,\; \ldots\; y_{-m,p} \ldots y_{-m,0})_{N_2/N_1}$$

где ознака N_2/N_1 указује да је број X записан у систему са основом N_1, кодираним системом са основом N_2.

Код рачунара је од посебног значаја тзв. бинарно-кодирани декадни систем, тј. случај кад декадне цифре ($N_1 = 10$) кодирамо бинарним бројевима ($N_2 = 2$) дужине 4 ($p = 3$). Интересантни су и бинарно-кодирани октални ($N_1 = 8$, $N_2 = 2$, $p = 2$) и бинарно-кодирани хексадекадни систем ($N_1 = 16$, $N_2 = 2$, $p = 3$). Таблица кодова је дата на следећој страни.

Пример 11. Декадни број $128,34$ написан у бинарно-кодираном декадном систему гласи $(128,34)_{10} = (0001\,0010\,1000, 0011\,0100)_{2/10}$.

У рачунској техници посебно интересантан је случај кодирања када је $N_1 = N_2^s$, где је s цео број већи од 1. У овом случају важи следећа теорема:

Декадна цифра	Бинарни код	Октална цифра	Бинарни код	Хексадекадна цифра	Бинарни код
0	0000	0	000	0	0000
1	0001	1	001	1	0001
2	0010	2	010	2	0010
3	0011	3	011	3	0011
4	0100	4	100	4	0100
5	0101	5	101	5	0101
6	0110	6	110	6	0110
7	0111	7	111	7	0111
8	1000			8	1000
9	1001			9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101
				E	1110
				F	1111

Број X записан у систему са основом N_2 има исти запис у систему $N_1 = N_2^s$, где је s цео број већи од 1, кодираним системом са основом N_2, тј. $(X)_{N_2} = (X)_{N_2/N_1}$.

За илустрацију наведене особине превођења може се узети пример окталног и бинарног бројног система ($N_1 = 8 = 2^3$, $N_2 = 2$, $s = 3$) и хексадекадног и бинарног бројног система ($N_1 = 16 = 2^4$, $N_2 = 2$, $s = 4$).

Пример 12. Октални број $36,25$: а) написати у бинарно-кодираном окталном систему; б) превести у број бинарног бројног система, па записе упоредити.

а) $(36,25)_8 = (011\,110, 010\,101)_{2/8}$.

б) На основу чињенице да је $8 = 2^3$ можемо писати

$$\begin{aligned}(36,25)_8 &= 3\cdot 8^1 + 6\cdot 8^0 + 2\cdot 8^{-1} + 5\cdot 8^{-2}\\ &= (11)_2\cdot(2^3)^1 + (110)_2\cdot(2^3)^0 + (10)_2\cdot(2^3)^{-1} + (101)_2\cdot(2^3)^{-2}\\ &= (1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0)\cdot 2^3 + (1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1)\cdot 2^0 + (1\cdot 2^1)\cdot 2^{-3} + (1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^0)\cdot 2^{-6}\\ &= 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-6}\\ &= (11110, 010101)_2.\end{aligned}$$

Пример 13. Хексадекадни број $4F1,23$ преведен у број бинарног бројног система износи $(4F1,23)_{16} = (0100\,1111\,0001, 0010\,0011)_2$.

7. Декодирање. Декодирање је процес супротан кодирању, у коме за познате кодове препознајемо изворне цифре. Декодира се од децималног зареза на лево и десно.

Пример 14. Превести октални број $352,14$ у број хексадекадног бројног система.

Прво ћемо октални број превести у бинарни (кодовима дужине 3) па га декодирањем (кодовима дужине 4) пребацити у хексадекадни број.
$(352,14)_8 = (011\,101\,010, 001100)_{2/8} = (0\,1110\,1010, 0011\,00)_2 = (EA,3)_{16}$.

Пример 15. Превести бинарни број $11010111010010, 1001011$ у број: а) окталног; б) хексадекадног бројног система.

а) $(11010111010010, 1001011)_2 = (011\,010\,111\,010\,010, 100\,101\,100)_2 = (32722, 454)_8$.

б) $(11010111010010, 1001011)_2 = (0011\,0101\,1101\,0010, 1001\,0110)_2 = (35D2, 96)_{16}$.