НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Др Светлана Јанковић

ЛИНЕАРНЕ ДИФЕРЕНЦНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ РЕДА

По писаном предању појам диференцне једначине јавља се још у раном средњем веку, у расправи Liber abaci (Књига о рачунаљкама), коју је написао италијански математичар Леонардо Пизано, познатији као Фибоначи (1175–1240?) (Fibonacci – скраћеница од filius Bonacci – Боначијев син). У овој расправи је описан следећи проблем:

Проблем са кунићима. Пар кунића после првог месеца доноси на свет пар младунаца и после другог месеца нови пар младунаца. Затим престаје репродукција тог пара. Ако се овај начин размножавања примени на све куниће, колико ће парова младунаца бити на крају прве године?

Размножавање кунића одвија се по наредној шеми:

Нека је x_n број парова кунића по истеку n-тог месеца. По истеку $(n+2)$-ог месеца биће x_{n+1} старих парова и x_n нових парова – онолико нових колико их је било на крају n-ог месеца. Отуда је $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \geqslant 1.$$

Из ове релације се сукцесивно добија низ бројева у коме је, почевши од трећег члана, сваки следећи једнак збиру претходна два, тј.

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 337,\ 570, \dots,$$

познат као *Фибоначијев низ*. Чланови низа називају се *Фибоначијеви бројеви*.

Према томе, на крају године ће бити $x_{12} = 233$ парова кунића.

Претходна функционална веза чланова Фибоначијевог низа је специјалан случај једначине

$$x_{n+k} = F(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_n), \quad n \geqslant 0$$

у којој се сваки члан низа изражава помоћу k претходних чланова и која се назива *диференцна (рекурентна, рекурзивна) једначина k-тог реда.* Првих k чланова $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ су *почетне вредности* или *почетни услови.* Остали чланови се одређују сукцесивно.

Решење диференцне једначине је сваки низ чији чланови задовољавају једначину. Јасно, решење се изражава у функцији коефицијената једначине и почетних услова. *Решити диференцну једначину* значи наћи сва њена решења.

Не постоји алгоритам којим се било која диференцна једначина може решити. Једну класу ефективно решивих диференцних једначина чине хомогене линеарне диференцне једначине.

Диференцна једначина облика

$$x_{n+k} = p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n + \varphi_n, \quad n \geqslant 0,$$

где су константе $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ је скуп комплексних бројева), а (φ_n) је дати бројни низ, назива се *нехомогена линеарна диференцна једначина k-тог реда.* Ако је $\varphi_n = 0$, $n \geqslant 0$, ради се о одговарајућој *хомогеној линеарној диференцној једначини.*

Ако је $\varphi_n = \mathrm{const}$ или $\varphi_n = q^n$, нехомогена линеарна диференцна једначина k-тог реда се елиминацијом низа φ_n своди на хомогену линеарну диференцну једначину $(k+1)$-ог реда.

Размотримо *хомогену линеарну диференцну једначину другог реда*

$$x_{n+2} = p x_{n+1} + q x_n, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

у којој су коефицијенти $p, q \in \mathbf{C}$ и почетни услови $x_0, x_1 \in \mathbf{C}$.

Наредни став изражава елементарне особине решења једначине (1).

Став 1. *За диференцну једначину* (1) *важе следећа тврђења:*

(i) *Ако је $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, тада је $x_n = 0$, $n \geqslant 0$ (тривијално решење);*

(ii) *Ако је $p, q \in \mathbf{R}$ и $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$, тада је $x_n \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 0$;*

(iii) *Ако су (u_n) и (v_n) решења једначине* (1) *и $A, B \in \mathbf{C}$ произвољне константе, тада је низ (x_n) са општим чланом $x_n = Au_n + Bv_n$, $n \geqslant 0$, решење те једначине;*

(iv) *Ако је* $p, q \in \mathbf{R}$ *и* (x_n) *комплексно решење једначине* (1), *тада су реални и имагинарни део овог низа такође решења те једначине.*

Доказ. Тврђења (i) и (ii) се лако доказују математичком индукцијом.

(iii) Непосредно следи

$$\begin{aligned}(\forall n \geqslant 0)\, \left(x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n\right)\Big|_{x_n = Au_n + Bv_n} & \\ &= Au_{n+2} + Bv_{n+2} - p(Au_{n+1} + Bv_{n+1}) - q(Au_n + Bv_n) \\ &= A(u_{n+2} - pu_{n+1} - qu_n) + B(v_{n+2} - pv_{n+1} - qv_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(iv) Нека је $x_n = u_n + iv_n$, $n \geqslant 0$, где су (u_n) и (v_n) реална решења једначине (1). За $A = 1$, $B = i$ према (iii) имамо

$$\begin{aligned}(\forall n \geqslant 0)\, 0 &= x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n \\ &= (u_{n+2} - pu_{n+1} - qu_n) + i(v_{n+2} - pv_{n+1} - qv_n).\end{aligned}$$

Како је комплексан број једнак нули ако и само ако су му реални и имагинарни део једнаки нули, то је

$$(\forall n \geqslant 0)\, u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n, \quad v_{n+2} = pv_{n+1} + qv_n. \quad \blacksquare$$

Теорема 1. (Теорема о јединствености решења) *Ако решења* (u_n) *и* (v_n) *једначине* (1) *задовољавају исте почетне услове, тада је* $u_n = v_n$, $n \geqslant 0$.

Доказ. Нека је $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$. Низ (z_n) са општим чланом $z_n = u_n - v_n$ по тврђењу (iii) Става 1 јесте решење једначине (1). Како је $z_0 = u_0 - v_0 = 0$, $z_1 = u_1 - v_1 = 0$, по тврђењу (i) Става 1 следи $z_n = 0$, $n \geqslant 0$, тј. $u_n = v_n$, $n \geqslant 0$. $\blacksquare$

Да би се одредио општи члан решења једначине (1), уводи се појам пропорционалних решења.

Дефиниција 1. Решења (u_n) и (v_n) једначине (1) су *пропорционална* ако постоји константа $c \in \mathbf{C}$ тако да је $u_n = cv_n$ за свако $n \geqslant 0$. У супротном, решења су *непропорционална*.

Теорема 2. *Решења* (u_n) *и* (v_n) *једначине* (1) *су непропорционална ако и само ако је*

$$u_0 : v_0 \neq u_1 : v_1.$$

Доказ. Једноставније је доказати негацију исказа теореме: Решења (u_n) и (v_n) једначине (1) су пропорционална ако и само ако је $u_0 : v_0 = u_1 : v_1$.

($\Rightarrow$): $u_n = cv_n$, $n \geqslant 0 \implies u_0 = cv_0$, $u_1 = cv_1 \implies u_0 : v_0 = u_1 : v_1$.

($\Leftarrow$): У доказу се примењује математичка индукција. Из $u_0 : v_0 = u_1 : v_1 = c$ следи $u_0 = cv_0$, $u_1 = cv_1$. Претпоставимо да за неко $n \in \mathbf{N}$ важи $u_n = cv_n$, $u_{n+1} = cv_{n+1}$. Тада је

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n = c(pv_{n+1} + qv_n) = cv_{n+2}.$$

По принципу математичке индукције следи $u_n = cv_n$ за свако $n \in \mathbf{N}$. $\blacksquare$

Теорема 3. *Нека су* (u_n) *и* (v_n) *било која два непропорционална решења једначине* (1) *и нека је* (y_n) *произвољно нетривијално решење те једначине. Тада постоје јединствено одређене константе* A_0 *и* B_0 *тако да је* $y_n = A_0u_n + B_0v_n$, $n \geqslant 0$.

Доказ. Како су (u_n) и (v_n) непропорционална решења, то важи

$$u_0 : v_0 \neq u_1 : v_1 \quad \text{па је} \quad u_0v_1 - v_0u_1 \neq 0.$$

Нека је (y_n) произвољно нетривијално решење једначине (1) са датим почетним вредностима y_0, y_1. Формирајмо систем

$$\begin{aligned} Au_0 + Bv_0 &= y_0 \\ Au_1 + Bv_1 &= y_1. \end{aligned}$$

Према тврђењу (i) Става 1 мора бити $y_0 \neq 0$ или $y_1 \neq 0$, тако да је ово нехомоген систем линеарних једначина. Како је детерминанта система $\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = u_0v_1 - v_0u_1 \neq 0$, овај систем има јединствено решење $A = A_0$, $B = B_0$.

Низ (z_n) са општим чланом $z_n = A_0u_n + B_0v_n$, $n \geqslant 0$ је решење једначине (1) по тврђењу (iii) Става 1. Оно задовољава почетне услове

$$z_0 = A_0u_0 + B_0v_0 = y_0, \quad z_1 = A_0u_1 + B_0v_1 = y_1.$$

Како решења (y_n) и (z_n) задовољавају исте почетне услове, по Теореми 1 следи да мора бити $y_n = z_n$ за свако $n \geqslant 0$. Према томе, $y_n = A_0u_n + B_0v_n$, $n \geqslant 0$. ■

Из ове теореме следи битан закључак:

Како се свако нетривијално решење (x_n) једначине (1) може изразити као линеарна комбинација непропорционалних решења (u_n) и (v_n), релацијом

$$x_n = Au_n + Bv_n, \quad n \geqslant 0, \tag{2}$$

где су $A, B \in \mathbf{C}$ произвољне константе, описана су сва решења једначине (1), укључујући и тривијално решење $(A = B = 0)$. Према томе, логично је низ (x_n) са општим чланом (2) назвати *општим решењем једначине* (1).

За конкретне вредности параметара A и B, одговарајуће решење је *посебно.* Јасно, посебно решење је и свако решење које испуњава дате почетне услове.

Према томе, за налажење општег решења неопходно је одредити било која два непропорционална решења. Поступак одређивања непропорционалних решења заснива се на представљању општег члана решења у облику

$$x_n = t^n, \quad n \geqslant 0,$$

где вредност $t \neq 0$ треба одредити. Из $t^{n+2} = pt^{n+1} + qt^n$ следи

$$t^2 = pt + q. \tag{3}$$

Једначина (3) се назива *карактеристична (придружена) једначина* диференцне једначине (1).

Приметимо да ако је $q = 0$, једначина (1) је хомогена линеарна диференцна једначина првог реда. Због тога надаље претпостављамо да је $q \neq 0$. У том случају корен карактеристичне једначине не може бити једнак нули.

Теорема 4. *За једначину* (1) *у којој је* $q \neq 0$, *важи:*

(i) *Ако карактеристична једначина* (3) *има различите корене* α *и* β *(реалне или комплексне), тада су* (α^n) *и* (β^n) *непропорционална решења једначине* (1);

(ii) *Ако је* α *двоструки корен карактеристичне једначине, тада су* (α^n) *и* $(n\alpha^n)$ *непропорционална решења.*

Доказ. (i) Нека је α корен карактеристичне једначине (3). Тада је (α^n) решење једначине (1), јер је

$$\begin{aligned}(\forall n \geqslant 0)\left(x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n\right)\Big|_{x_n=\alpha^n} &= \alpha^{n+2} - p\alpha^{n+1} - q\alpha^n \\ &= \alpha^n \cdot \alpha^2 - p\alpha^{n+1} - q\alpha^n \\ &= \alpha^n(p\alpha + q) - (p\alpha^{n+1} + q\alpha^n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ако је β други корен карактеристичне једначине, различит од α, тада је $u_0 : v_0 = 1 : 1$, $u_1 : v_1 = \alpha : \beta \neq 1$, тако да су по Теореми 3 решења (α^n) и (β^n) непропорционална.

(ii) Ако је α двоструки корен карактеристичне једначине, следи $\alpha = p/2$. Тада је $(n\alpha^n)$ решење једначине (1), јер је

$$\begin{aligned}(\forall n \geqslant 0)\left(x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n\right)\Big|_{x_n=n\alpha^n} &= (n+2)\alpha^{n+2} - p(n+1)\alpha^{n+1} - qn\alpha^n \\ &= n(\alpha^n - p\alpha^{n+1} - q\alpha^n) + 2\alpha^{n+2} - p\alpha^{n+1} \\ &= \alpha^{n+1}(2\alpha - p) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Како је $v_0 : u_0 = 0 : 1$, $v_1 : u_1 = \alpha : \alpha$ и $\alpha \neq 0$, по Теореми 3 следи да су (α^n) и $(n\alpha^n)$ непропорционална решења. ∎

Према томе, опште решење једначине (1) је

$$x_n = \begin{cases} A\alpha^n + B\beta^n, \ n \geqslant 0, & \alpha \neq \beta, \\ (A + Bn)\,\alpha^n, \ n \geqslant 0, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Претходна разматрања могу се применити у решавању *нехомогене линеарне диференцне једначине првог реда*

$$x_{n+1} = px_n + d, \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

Низ дефинисан овом једначином је потпуно одређен познавањем првог члана x_1.

Ако је $d = 0$, за почетну вредност x_1 посебно решење одговарајуће хомогене једначине

$$x_{n+1} = px_n, \quad n \geqslant 1$$

је *геометријски низ* са општим чланом $x_n = p^{n-1}x_1$, $n \geqslant 1$. За произвољну почетну вредност C, *опште решење* ове једначине је

$$x_n = C\,p^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Ако је $d \neq 0$, решавање једначине (4) се може свести на решавање хомогене линеарне диференцне једначине другог реда. Како је $x_{n+2} = px_{n+1} + d = px_{n+1} + (x_{n+1} - px_n)$ за свако $n \geqslant 1$, то је

$$x_{n+2} = (p+1)x_{n+1} - px_n, \quad n \geqslant 1. \tag{5}$$

Карактеристична једначина ове диференцне једначине је $t^2 - (p+1)t + p = 0$. У зависности од вредности p разликујемо следеће случајеве.

Ако је $p \neq 1$, корени карактеристичне једначине су $t_1 = p$, $t_2 = 1$, тако да је опште решење

$$x_n = Ap^n + B, \quad n \geqslant 1.$$

За почетни услов x_1 једначине (4) нека су x_1, $px_1 + d$ почетни услови једначине (5). Из система

$$\begin{aligned} Ap + B &= x_1 \\ Ap^2 + B &= px_1 + d \end{aligned}$$

имамо $A = \dfrac{x_1}{p} - \dfrac{d}{p(1-p)}$, $B = \dfrac{d}{1-p}$, тако да је посебно решење једначине (5)

$$x_n = \left[\frac{x_1}{p} - \frac{d}{p(1-p)}\right] p^n + \frac{d}{1-p}, \quad n \geqslant 1.$$

Директном провером се показује да је то и посебно решење једначине (4). Ако је почетни услов произвољна константа, онда је и чинилац уз p^n произвољна константа – означимо је са C. Због произвољности константе C следи да је *опште решење једначине* (4)

$$x_n = C\,p^n + \frac{d}{1-p}, \quad n \geqslant 1.$$

Ако је $p = 1$, диференцном једначином

$$x_{n+1} = x_n + d, \quad n \geqslant 1$$

и почетном вредношћу x_1 потпуно је одређен *аритметички низ* x_1, $x_1 + d$, $x_1 + 2d$, ... Уочимо да се општи члан аритметичког низа може одредити и решавањем диференцне једначине (5) за $p = 1$, применом истог поступка као у случају $p \neq 1$. Једноставно се закључује да је у том случају *опште решење*

$$x_n = C + (n-1)d, \quad n \geqslant 1.$$

Претходна теоријска разматрања илустроваћемо следећим примерима.

Пример 1. Одредити општи члан Фибоначијевог низа из проблема са кунићима.

Решење. За дате почетне вредности $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ методом математичке индукције се једноставно закључује да је решење диференцне једначине $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ низ (x_n) са позитивним вредностима.

Корени карактеристичне једначине $t^2 - t - 1 = 0$ су $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Опште решење је

$$x_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

За дате почетне вредности $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ добија се систем

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1, \end{aligned}$$

који има решење $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $B = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Отуда је општи члан Фибоначијевог низа

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \quad n \geqslant 0.$$

Позитивност чланова овог низа може се непосредно доказати математичком индукцијом, без познавања диференцне једначине чије је он решење. („Математика за III разред средње школе“, J. Кечкић, стр. 212). $\triangle$

Пример 2. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = x_{n+1}^4 \cdot x_n^{-4}, \quad n \geqslant 0, \qquad x_0 = 3,\ x_1 = 1.$$

Решење. Математичком индукцијом се доказује да је $x_n > 0$, $n \geqslant 0$. Сменом $y_n = \ln x_n$ ова једначина се трансформише на облик

$$y_{n+2} = 4y_{n+1} - 4y_n, \quad n \geqslant 0$$

са почетним вредностима $y_0 = \ln 3$, $y_1 = 0$. Карактеристична једначина $t^2 - 4t + 4 = 0$ има двоструки корен $t = 2$, тако да је опште решење

$$y_n = (A + Bn)\,2^n, \quad n \geqslant 0.$$

За дате почетне вредности посебно решење је

$$y_n = (1-n)2^n \ln 3, \quad n \geqslant 0,$$

тако да је решење полазне једначине $x_n = 3^{(1-n)2^n}$, $n \geqslant 0$. $\triangle$

Пример 3. Одредити сва реална решења диференцне једначине

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n, \quad n \geqslant 0,$$

а затим и посебно решење за почетне услове $x_0 = 1, x_1 = 1$.

Решење. Решимо општији случај. Нека су $t_{1,2} = a \pm ib$, $b \neq 0$, комплексни корени карактеристичне једначине диференцне једначине (1). Тада је опште решење

$$x_n = A\,(a+ib)^n + B\,(a-ib)^n, \quad n \geqslant 0,$$

где су $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$ произвољне комплексне константе. Ако се ови корени изразе у тригонометријском облику

$$a \pm ib = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi), \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

па се потом примени Моаврова формула, опште решење је облика

$$\begin{aligned} x_n &= (A_1 + iA_2)\,[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n + (B_1 + iB_2)\,[\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)]^n \\ &= (A_1 + iA_2)\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + (B_1 + iB_2)\rho^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi), \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

По тврђењу (iv) Става 1 решења једначине (1) су реални и имагинарни део овог решења. Према томе, решења су

$$\begin{aligned} u_n &= (A_1 + B_1)\rho^n\cos n\varphi + (-A_2 + B_2)\rho^n\sin n\varphi, \quad n \geqslant 0, \\ v_n &= (A_2 + B_2)\rho^n\cos n\varphi + (A_1 - B_1)\rho^n\sin n\varphi, \quad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Како су A_1, A_2, B_1, B_2 произвољне реалне константе, реално опште решење једначине (1) је

$$x_n = C\,\rho^n\cos n\varphi + D\,\rho^n\sin n\varphi, \quad n \geqslant 0,$$

где су C и D произвољне реалне константе. Приметимо да су $(\rho^n\cos n\varphi)$ и $(\rho^n\sin n\varphi)$ непропорционална решења.

Специјално, за диференцну једначину из овог примера корени карактеристичне једначине $t^2 - 2t + 4 = 0$ су $t_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Како је

$$1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

то је реално опште решење низ са општим чланом

$$x_n = C\,2^n\cos\frac{n\pi}{3} + D\,2^n\sin\frac{n\pi}{3}, \quad n \geqslant 0,$$

где су C и D произвољне реалне константе. За почетне вредности $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ посебно решење је $x_n = 2^n\cos\dfrac{n\pi}{3}$, $n \geqslant 0$. $\triangle$

Пример 4. Одредити све вредности реалног параметра x_0 за које је монотоно растући низ $x_0, x_1, x_2, \ldots$, дефинисан једнакостима

$$x_{n+1} = 2^n - 3x_n, \quad n \geqslant 0.$$

Решење. Из $x_{n+2} = 2\cdot 2^n - 3x_{n+1} = 2(x_{n+1} + 3x_n) - 3x_{n+1}$ следи

$$x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n, \quad n \geqslant 0.$$

Опште решење ове диференцне једначине је

$$x_n = A\,2^n + B\,(-3)^n, \quad n \geqslant 0.$$

За почетне вредности x_0, $x_1 = 1-3x_0$ из услова $x_0 < x_1$ следи $x_0 < 1/4$. Посебно решење је

$$x_n = \frac{1}{5}\cdot 2^n + \Big(x_0 - \frac{1}{5}\Big)(-3)^n, \quad n \geqslant 0.$$

Ако је $a_0 \neq 1/5$, постоји природан број n_0 за који је други сабирак по модулу већи од првог, тако да за $n > n_0$ чланови низа мењају знак. Према томе, низ ће бити монотон само ако је $a_0 = 1/5$. $\triangle$

Пример 5. Доказати да су сви чланови низа (x_n), одређени једнакостима

$$x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2+1}, \quad n \geqslant 1, \quad x_1 = 1,$$

природни бројеви.

Решење. Математичком индукцијом закључујемо да је низ (x_n) монотоно растући, јер је

$$x_{n+1} - x_n = 2x_n + \sqrt{8x_n^2+1} > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Из $(x_{n+1} - 3x_n)^2 = 8x_n^2 + 1$ следи

$$x_{n+1}^2 - 6x_{n+1}\cdot x_n + x_n^2 = 1, \quad x_{n+2}^2 - 6x_{n+2}\cdot x_{n+1} + x_{n+1}^2 = 1.$$

Одузимањем ових једнакости имамо

$$(x_{n+2} - x_n)\,(x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n) = 0, \quad n \geqslant 1$$

Како је $x_{n+2} - x_n > 0$ за свако $n \geqslant 1$, то мора бити

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \quad n \geqslant 1.$$

Коефицијенти ове једначине и почетне вредности $x_1 = 1, x_2 = 6$ су цели бројеви, тако да се по принципу математичке индукције лако закључује да су сви чланови низа (x_n) цели бројеви. Како је низ монотоно растући и како је $x_1 = 1$, то следи да су сви чланови низа природни бројеви. $\triangle$

Пример 6. Решавање хомогеног система линеарних диференцних једначина првог реда

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= px_n + qy_n \\ y_{n+1} &= rx_n + sy_n \end{aligned} \qquad x_0 = a,\ y_0 = b,$$

своди се на решавање хомогене линеарне диференцне једначине другог реда.

Ако је $q = r = 0$, решење су геометријске прогресије $x_n = ap^n$, $y_n = bs^n$, $n \geqslant 0$.

Нека је $q \neq 0$ или $r \neq 0$. На пример, ако је $q \neq 0$, тада је $qy_{n+1} = qrx_n + qsy_n$, тако да је коначно

$$\begin{gathered} x_{n+2} = (p+s)x_{n+1} + (qr - ps)x_n, \quad n \geqslant 0 \\ x_0 = a, \quad x_1 = px_0 + qy_0 = ap + bq. \end{gathered}$$

Низ (y_n) одређује се из прве једначине система. $\triangle$

Пример 7. Ако се у диференцној једначини

$$x_{n+1} = \frac{px_n + q}{rx_n + s}, \quad x_0 = a,$$

x_n изрази у облику количника $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, решавање ове једначине се своди на решавање система

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= pu_n + qv_n \\ v_{n+1} &= ru_n + sv_n \end{aligned} \qquad u_0 = a, \quad v_0 = 1.$$

На пример, диференцна једначина

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{1 - x_n}, \quad x_0 = 0,$$

се овом сменом своди на систем

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n + u_n, \\ v_{n+1} &= v_n - u_n \end{aligned} \qquad u_0 = 0, \quad v_0 = 1$$

(v_0 може бити било који број различит од нуле). Из овог система се поступком као у Примеру 6, добија линеарна диференцна једначина

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \quad n \geqslant 0,$$

која има опште решење

$$u_n = A\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n + B\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n, \quad n \geqslant 0.$$

Раздвајањем реалног и имагинарног дела као у Примеру 3, добија се реално опште решење

$$u_n = C\,(\sqrt{2}\,)^n \cos\frac{n\pi}{4} + D\,(\sqrt{2}\,)^n \sin\frac{n\pi}{4}, \quad n \geqslant 0.$$

За почетне вредности $u_0 = 0, u_1 = v_0 - u_0 = 1$ имамо

$$\begin{aligned} u_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad C\cdot 1 + D\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0,\ D - \text{произвољно}, \\ u_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad D\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad D = 1, \end{aligned}$$

тако да је $u_n = (\sqrt{2}\,)^n \sin\dfrac{n\pi}{4}$, $n \geqslant 0$.

Како је $v_n = u_{n+1} - u_n = (\sqrt{2}\,)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$, $n \geqslant 0$, решење полазне једначине је $x_n = \dfrac{u_n}{v_n} = \operatorname{tg}\dfrac{n\pi}{4}$, $n \geqslant 0$. $\triangle$

Напомена. Аутор је при изради овог рада користио брошуру „Елементарна теорија бројева, Дирихлеов принцип, Диференцне једначине“, З. Каделбург, В. Мићић, В. Јанковић, Друштво математичара, физичара и астронома СР Србије, Материјали за младе математичаре, св. 8, 1976, која садржи већи број задатака о диференцним једначинама, посебно серију интересантних задатака о особинама Фибоначијевог низа.