Др Ђорђе Дугошија

ФУРИЈЕ-МОЦКИНОВ МЕТОД ЕЛИМИНАЦИЈЕ

1. Увод

И поред великог практичног значаја, садржаји из теорије система линеарних неједначина су код нас веома ретки у настави математике на свим нивоима. Угњеждено је мишљење да су ови садржаји сложени, да захтевају већи степен апстракције и познавање специјалних садржаја, нпр. елемената конвексне анализе, па самим тим излазе из оквира могућности обраде. У најбољем случају разматрају се системи са две непознате који се могу решити графички. Да то није тако, показаћемо у овом раду, чији је циљ *кратко, јасно* и *елементарно* извођење основних резултата теорије система линеарних неједначина. У основи свега лежи елементарни и фундаментални метод елиминације Фурије-Моцкина, који није ништа компликованији од Гаусовог метода елиминације за системе линеарних једначина.

2. Решавање система линеарних неједначина

Сваки систем линеарних неједначина се може представити у облику

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots m. \tag{1}$$

Решење система је ма која уређена n-торка вредности непознатих која задовољава све неједначине система. Под решавањем система (1) подразумевамо налажење скупа свих решења.

Како се свака једнакост $A = B$ може еквивалентно записати као систем од две неједнакости $A \geqslant B$ и $A \leqslant B$, решавање система неједначина обухвата и решавање система једначина и неједначина.

Изложићемо Фурије-Моцкинову методу решавања система (1). Идеја методе је елиминација непознатих. Претпоставимо да желимо да из система (1) елиминишемо непознату x_1. Уведимо ознаке

$$I = \{\, i \mid a_{i1} > 0 \,\},$$
$$J = \{\, j \mid a_{j1} < 0 \,\},$$
$$K = \{\, k \mid a_{k1} = 0 \,\}.$$

Решавањем неједначина система по непознатој x_1 добијамо

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant [b_i - (a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)]/a_{i1}, \quad i \in I, \\ x_1 \leqslant [b_j - (a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n)]/a_{j1}, \quad j \in J, \\ a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geqslant b_k, \quad k \in K. \end{gathered}$$

Уколико је неки од скупова I, J или K празан, одговарајуће неједначине не постоје. Ако скупови I и J нису празни, онда непознате $x_2, x_3, \ldots, x_n$ задовољавају систем

$$\begin{gathered} [b_i - (a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)]/a_{i1} \leqslant [b_j - (a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n)]/a_{j1}, \quad i \in I, j \in J \\ a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \geqslant b_k, \quad k \in K, \end{gathered}$$

односно

$$\begin{gathered} \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{a_{ip}}{a_{i1}} - \frac{a_{jp}}{a_{j1}} \right) x_p \geqslant \frac{b_i}{a_{i1}} - \frac{b_j}{a_{j1}}, \quad i \in I,\ j \in J, \\ \sum_{p=2}^{n} a_{kp}x_p \geqslant b_k, \quad k \in K, \end{gathered} \tag{2}$$

Ако је неки од скупова I или J празан, прва група нејднaчина у (2) не постоји. Ако је $K = \emptyset$, друга група неједначина у (2) не постоји. Специјално, ако су K и бар један од скупова I и J празни, (2) представља празан скуп услова. Формално, по дефиницији решења система, решења празног система су произвољне вредности његових непознатих.

Из решења система (2) може се реконструисати свако решење система (1):

Ако непознате $x_2, x_3, \ldots, x_n$ задовољавају систем (2), онда уређена n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представља решење система (1) ако и само ако се x_1 произвољно изабере из интервала

$$\left[\max_{i \in I} \frac{b_i - (a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)}{a_{i1}},\ \min_{j \in J} \frac{b_j - (a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n)}{a_{j1}} \right],\ I \neq \emptyset, J \neq \emptyset,$$

односно

$$\left(-\infty,\ \min_{j \in J} \frac{b_j - (a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n)}{a_{j1}} \right],\ I = \emptyset, J \neq \emptyset,$$

односно

$$\left[\max_{i \in I} \frac{b_i - (a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)}{a_{i1}},\ +\infty \right),\ I \neq \emptyset, J = \emptyset,$$

односно

$$(-\infty,\ +\infty),\ I = J = \emptyset.$$

На тај начин решавање система (1) свело се на решавање система (2).

Поступак елиминације би се могао даље наставити на исти начин, бирајући по вољи редослед непознатих које се елиминишу. Системе који се добијају узастопним елиминацијама зваћемо *елиминанте* система (1). Ако се на празан систем формално примени поступак елиминације, добићемо празан систем са једном непознатом мање. Последња елиминанта не садржи непознате. Она је састављена од бројевних неједнакости или је празан скуп услова.

Могући су случајеви:

1. Последња елиминанта садржи нетачну неједнакост.

Тада полазни систем нема ниједно решење.

2. Све неједнакости у последњој елиминанти су тачне. То је испуњено ако је она празан скуп услова.

Једно решење система (1) добијамо ходом уназад реконструкцијом решења елиминанти, полазећи од последње, према наведеном правилу, све док се не реконструише цело решење полазног система. Погодним изборима вредности за непознате, овако се може добити свако решење полазног система.

Пример 1. Доказати да систем

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 &\geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &\geqslant 3 \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_4 &\geqslant -1 \end{aligned}$$

нема решења.

Елиминацијом x_1 добијамо систем

$$\begin{aligned} -3x_2/2 + x_3/2 - x_4/2 &\geqslant -1/2 \\ 9x_2/2 - 3x_3/2 + 3x_4/2 &\geqslant 7/2. \end{aligned}$$

Елиминацијом x_4 из овог система добијамо нетачну неједнакост $1 \geqslant 7/3$. Стога полазни систем нема решења.

3. Теорија система линеарних неједначина

Поступак елиминације се може искористити за извођење фундаменталних резултата о системима линеарних неједначина. Класично извођење ових резултата захтева познавање конвексне анализе.

Приметимо најпре да се неједначине сваке елиминанте система (1) линеарних неједначина, могу добити множењем страна неједначина у (1) неким ненегативним бројевима и сабирањем одговарајућих страна добијених неједначина. Тако се (i,j)-та ($i \in I$, $j \in J$) неједнакост елиминанте (2) може добити множењем страна i-те неједначине у (1) позитивним бројем $1/a_{i1}$, j-те позитивним бројем $-1/a_{j1}$ и осталих неједначина нулом и сабирањем страна добијених неједнацхина. Такође се k-та неједначина ($k \in K$) може добити множењем страна k-те неједначине у (1) са 1, осталих са 0 и сабирањем страна добијених неједначина. Дакле, сваку неједначину елиминанте (2) можемо добити као ненегативну комбинацију полазних неједначина. Како је ненегативна комбинација ненегативних комбинација поново ненегативна комбинација, правило важи за сваку елиминанту.

Покажимо да се поступком формирања ненегативне комбинације уз релаксацију добијене десне стране, може добити свака линеарна последица система (1) који има бар једно решење.

Фаркаш-ева лема. *Ако систем (1) има решења и ако свако његово решење задовољава неједнакост*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \geqslant d, \tag{3}$$

онда постоје ненегативни бројеви $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ такви да је:

$$c_j = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_m a_{mj}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

и

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_m b_m \geqslant d. \tag{5}$$

Другим речима, множењем обеју страна неједначина у (1) редом са ненегативним бројевима $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и сабирањем одговарајућих страна, добијамо неједнакост из које, релаксацијом десне стране, добијамо последицу (3) система (1).

Доказ. Посматрамо систем са непознатим y и x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i\ , \qquad i = 1, 2, \cdots \\ -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + y \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Како систем (1) по претпоставци има решења и систем (6) има решења. Једно решење се нпр. добија када се изабере решење $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ система (1) и $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$.

Извршимо елиминацију непознатих система (6) остављајући y као последњу.

Размотримо процес елиминације непознате y. Због претпоставке да је y последња непозната која се елиминише, миноранте и мајоранте непознате y могу бити само реални бројеви. Како се вредност непознате y може неограничено увећавати, мајоранте не постоје. Како су вредности непознате y, због

$$y \geqslant c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \geqslant d,$$

ограничене с доње стране са d, мора постојати бар једна миноранта и y не може бити мање од максимума D свих миноранти. Једна од неједначина при елиминацији непознате y је стога $y \geqslant D$. Ова неједначина може се добити множењем страна неједначина посматраног система редом са ненегативним бројевима $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, μ и сабирањем одговарајућих страна добијених неједначина. Отуда је

$$\begin{gathered} \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_m a_{mj} - \mu c_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_m b_m = D. \end{gathered}$$

За $y = D$ постоји решење $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ система, па је

$$D \geqslant c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + \cdots + c_n x_n^0 \geqslant d.$$

Из изведених веза следи тврђење. ■

ТЕОРЕМА О СИСТЕМУ КОЈИ НЕМА РЕШЕЊА. *Систем (1) нема решења ако и само ако постоје ненегативни бројеви $y_1, y_2, \dots, y_m$ такви да је*

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i > 0.$$

Доказ. Систем (1) нема решења акко се у некој елиминантни појављује нетачна бројевна неједнакост $0 \geqslant b$, $(b > 0)$. Она се добија множењем страна неједначина система (1) редом са неким ненегативним бројевима y_i, $i = 1, 2, \dots, m$ и сабирањем страна тако добијених неједначина. То је управо тврђење теореме. ■

Ради упрошћења записа, у даљем ћемо користи матрични запис система неједначина уводећи међу матрицама истог формата релације $\geqslant$ и $>$ акко између свих одговарајућих елемената тих матрица важе обичне релације $\geqslant$ и $>$.

МОЦКИНОВА ТЕОРЕМА АЛТЕРНАТИВЕ. *За произвољне матрице A, B, C које имају исти број колона, тачно један од система*

$$(I) \qquad \begin{aligned} Ax &> 0 \\ Bx &\geqslant 0 \\ Cx &= 0 \end{aligned}$$

и

$$(II) \qquad \begin{aligned} uA + vB + wC &= 0 \\ u \geqslant 0\ , \quad u &\neq 0 \\ v &\geqslant 0 \end{aligned}$$

има решења.

Доказ. Системи (I) и (II) не могу истовремено имати решења. У супротном, из $u \cdot Ax > 0$, $v \cdot Bx \geqslant 0$, $w \cdot Cx = 0$, добили бисмо контрадикцију $0 = (uA + vB + wC)x > 0$.

Претпоставимо сада да систем (I) нема решења. Нека је $e = (1, 1, \dots, 1)^t$. Тада нема решења ни систем

$$\begin{aligned} Ax &\geqslant e \\ Bx &\geqslant 0 \\ Cx &\geqslant 0 \\ -Cx &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Према претходној теореми, постоје $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$ такви да је $uA + vB + (p-q)C = 0$, $\quad ue > 0$. Тада је (u, v, w) решење система (II), ако ставимо $w = p - q$. ■

Препуштамо читаоцу да као вежбу изведе следеће теореме:

Кунова теорема алтернативе. *Нека су A, B, C матрице са истим бројем колона. Тада тачно један од система*

$$(I) \qquad \begin{aligned} Ax &> a \\ Bx &\geqslant b \\ Cx &= c \end{aligned}$$

$$(II) \qquad \begin{aligned} uA + vB + wC &= 0 \\ ua + vb + wc &\geqslant 0 \\ u = 0 \Rightarrow vb + wc &> 0 \\ u &\geqslant 0 \\ v &\geqslant 0 \end{aligned}$$

има решења.

Такерова кључна теорема. *Нека је A произвољна реална матрица. Тада постоје x и y такви да је*

$$Ax \geqslant 0, \quad y^t A = 0, \quad y \geqslant 0, \quad Ax + y > 0 \ .$$

Сепарација дисјунктних полиедара. *Нека су скупови $P = \{x \in R^n \mid Ax \geqslant b\}$ и $Q = \{x \in R^n \mid Cx \geqslant d\}$ непразни и дисјунктни. Тада постоји функција $f(x) = px + q$, $p \neq 0$ позитивна на P и негативна на Q.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dantzig G., *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, Princeton N.J. 1963.

[2] Mangasarian O., *Nonlinear programming*, McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney 1969.