мр Саво Ћебић

ОСАМ РЕШЕЊА ЈЕДНОГ ЗАДАТКА

На класификационом испиту из математике за упис на техничке факултете Универзитета у Београду, у једном уписном року[1], био је и следећи задатак:

Полазећи од збира геометријске прогресије $1+x+x^2+x^3+x^4$ (или на неки други начин) могу се израчунати $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{4\pi}{5}$. Збир $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$ једнак је:

A) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$; B) $-\frac{1}{2}$; C) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; D) $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; E) $-\frac{1}{4}$.

Задатак је био међу три задатка који су носили највећи број поена (8). Посебан изазов да се задатак реши „на неки други начин" побуђује „наметнута" идеја за његово решавање.

Даћемо осам различитих решења наведеног задатка.

Решење 1. Користећи образац за збир првих n чланова геометријске прогресије $S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$ $(q\neq 1)$, имамо да је $1+x+x^2+x^3+x^4 = \frac{x^5-1}{x-1}$, тј.

$$x^5-1=(x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

Биномна једначина $x^5-1=0$ има за решења следеће комплексне бројеве: $\cos 0 + i\sin 0 = 1$, $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$, $\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$. Дакле, $\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ је једно решење једначине $1+x+x^2+x^3+x^4=0$, тј. $1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^3+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^4=0$. Одавде је

$$1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+ \\ +i\Big(\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}\Big)=0,$$

[1] 25.06.1990. године

па је $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$. Како је

$$\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\Bigl(2\pi-\frac{2\pi}{5}\Bigr)=\cos\frac{2\pi}{5}\quad\text{и}\quad\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\Bigl(2\pi-\frac{4\pi}{5}\Bigr)=\cos\frac{4\pi}{5},$$

биће

$$1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=1+2\Bigl(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\Bigr)=0,$$

па је $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.

Напомена. Применом Виетових формула на једначину $1+x+x^2+x^3+x^4=0$ брже долазимо до резултата. Видели смо да су корени једначине комплексни бројеви $x_k=\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}$, $k=1,2,3,4$. Како је $x_1+x_2+x_3+x_4=-1$, те како су x_1 и x_2 као и x_3 и x_4 међусобно конјуговано-комплексни бројеви, биће

$$x_1+x_4=\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=2\cos\frac{2\pi}{5}\quad\text{и}\quad x_2+x_3=2\cos\frac{4\pi}{5}.$$

Дакле, $x_1+x_2+x_3+x_4=2\Bigl(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\Bigr)=-1$, одакле је

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}.$$

Решење 2. Пођимо од

$$\sin\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\quad(1)\qquad\text{и}\qquad\sin\frac{4\pi}{5}=2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}.\qquad(2)$$

Множењем (1) и (2) добијамо $\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}=4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$, односно

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\qquad(3)$$

(јер је $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\Bigl(\pi-\frac{\pi}{5}\Bigr)=\sin\frac{\pi}{5}$). Како је

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}&=-2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\Bigl(-\frac{\pi}{10}\Bigr)=2\cos\Bigl(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\Bigr)\\&=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5},\end{aligned}$$

имамо да је

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}.\qquad(4)$$

Из (4) имамо да је $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{5}$, па (3) постаје $\Bigl(\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{5}\Bigr)\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$, односно, после сређивања $4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$, а одавде, због $\cos\frac{2\pi}{5}>0$, имамо да је $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Како је

$$\cos\frac{4\pi}{5}=\cos^2\frac{2\pi}{5}-\sin^2\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1=2\Big(\frac{-1+\sqrt5}{4}\Big)^2-1=\frac{-1-\sqrt5}{4},$$

то је $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt5}{4}+\frac{-1-\sqrt5}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac12.$

Решење 3.

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}&=\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}\\&=\frac{\sin\Big(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\Big)+\sin\Big(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\Big)+\sin\Big(\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}\Big)+\sin\Big(\frac{\pi}{5}-\frac{4\pi}{5}\Big)}{2\sin\frac{\pi}{5}}\\&=\frac{\sin\frac{3\pi}{5}+\sin\Big(-\frac{\pi}{5}\Big)+\sin\pi+\sin\Big(-\frac{3\pi}{5}\Big)}{2\sin\frac{\pi}{5}}\\&=\frac{\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}+0-\sin\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac12.\end{aligned}$$

Решење 4. Како је $\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\Big(2\pi-\frac{2\pi}{5}\Big)=\cos\frac{8\pi}{5}$, биће

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{5}&=\cos\frac{8\pi}{5}=\cos2\cdot\frac{4\pi}{5}=\cos^2\frac{4\pi}{5}-\sin^2\frac{4\pi}{5}\\&=\Big(\cos^2\frac{2\pi}{5}-\sin^2\frac{2\pi}{5}\Big)^2-\Big(2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\Big)^2\\&=\Big(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\Big)^2-4\Big(1-\cos^2\frac{2\pi}{5}\Big)\cos^2\frac{2\pi}{5}\\&=4\cos^4\frac{2\pi}{5}-4\cos^2\frac{2\pi}{5}+1-4\cos^2\frac{2\pi}{5}+4\cos^4\frac{2\pi}{5}\\&=8\cos^4\frac{2\pi}{5}-8\cos^2\frac{2\pi}{5}+1,\end{aligned}$$

одакле следи $8\cos^4\frac{2\pi}{5}-8\cos^2\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}+1=0$. Значи, $\cos\frac{2\pi}{5}$ је једно решење једначине $8x^4-8x^2-x+1=0$. Како је

$$\begin{aligned}8x^4-8x^2-x+1&=8x^2(x^2-1)-(x-1)=(x-1)[8x^2(x+1)-1]\\&=(x-1)(8x^3+8x^2-1)=(x-1)(8x^3+4x^2+4x^2-1)\\&=(x-1)[4x^2(2x+1)+(2x-1)(2x+1)]\\&=(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1),\end{aligned}$$

то је

$$8x^4-8x^2-x+1=0 \iff (x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1)=0$$
$$\iff x=1 \lor x=-\frac{1}{2} \lor x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

Како је $\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ и $\cos\dfrac{2\pi}{5}\neq 1$, то мора бити $\cos\dfrac{2\pi}{5}=-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$,

$$\cos\frac{4\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1=2\Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\Big)^2-1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4},$$

па је $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

Решење 5. Пођимо од једнакости $\sin\pi=0$,

$$\sin\pi=\sin\frac{5\pi}{5}=\sin\Big(\frac{4\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\Big)=\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}=0.$$

Даље имамо да је:

$$2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+\Big(\cos^2\frac{2\pi}{5}-\sin^2\frac{2\pi}{5}\Big)\sin\frac{\pi}{5}=0,$$
$$4\sin\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}\Big(\cos^2\frac{\pi}{5}-\sin^2\frac{\pi}{5}\Big)+\Big(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\Big)\sin\frac{\pi}{5}=0,$$
$$4\cos^2\frac{\pi}{5}\Big(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\Big)+2\Big(\cos^2\frac{\pi}{5}-\sin^2\frac{\pi}{5}\Big)^2-1=0,$$
$$8\cos^4\frac{\pi}{5}-4\cos^2\frac{\pi}{5}+2\Big(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\Big)^2-1=0,$$
$$16\cos^4\frac{\pi}{5}-12\cos^2\frac{\pi}{5}+1=0.$$

Решавањем ове биквадратне једначине добијамо да је $\cos^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$ или $\cos^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$. Друга могућност отпада јер је $\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}<\dfrac{1}{2}$ (због $\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\pi}{4}$ је $\cos\dfrac{\pi}{5}>\cos\dfrac{\pi}{4}$), па је $\cos^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$. Даље је $\cos\dfrac{2\pi}{5}=2\cos^2\dfrac{\pi}{5}-1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, па се као у претходном решењу добија $\cos\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ и $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}$.

Решење 6. Нека је $A_0A_1A_2A_3A_4$ правилан петоугао уписан у круг полупречника 1 са центром у координатном почетку, сл. 1. Ако A_0 има координате $(1,0)$, онда темена A_k имају координате $\Big(\cos\dfrac{2k\pi}{5},\sin\dfrac{2k\pi}{5}\Big)$, $k=1,2,3,4$.

Очигледно је $\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\vec{0}$ (вектори $\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ надовезивањем дају нови петоугао). Одавде имамо да је збир првих (као и других) координата вектора $\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ и $\overrightarrow{OA_4}$ једнак нули, тј.

$$1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0,$$

одакле као у решењу 1 следи $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}$.

Сл. 1 Сл. 2

Решење 7. Посматрајмо правилан петоугао $ABCDE$, сл. 2. Како је $\angle AOB = \dfrac{2\pi}{5}$, то је $\angle ADB = \dfrac{\pi}{5}$ (као периферијски угао над истим луком). Троугао ABD је једнакокраки: $\overline{AD} = \overline{BD} = d$, па је $\angle BAD = \angle ABD = \left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) : 2 = \dfrac{2\pi}{5}$.

Применом Птоломејеве теореме[2] добијамо $a_5 \cdot d + a_5^2 = d^2$. Одавде је $d = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\, a_5$. Из троугла ADF имамо да је

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{a_5}{2} : d = \frac{a_5}{(1+\sqrt{5})a_5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Даље је $\cos\dfrac{4\pi}{5} = \cos 2\cdot\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ и $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{1}{2}$.

Решење 8. За ово решење искористићемо златни пресек и две теореме које се односе на правилан петоугао и правилан десетоугао.

Ако је нека дуж подељена на два неједнака дела тако да је већи део геометријска средина целе дужи и мањег дела, онда се каже да је та дуж подељена по златном пресеку. Ако је $AB = a$ и x већи део дужи, сл. 3, онда је $a : x = x : (a - x)$, одакле је $x = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Сл. 3 Сл. 4

[2]Птоломејева теорема за тетивни четвороугао: Збир производа наспрамних страница једнак је производу дијагонала.

Теорема 1. Страница правилног десетоугла уписаног у круг једнака је већем одсечку полупречника круга подељеног по златном пресеку:

$$a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad R \ - \ \text{полупречник круга.}$$

Теорема 2. Квадрат странице правилног уписаног петоугла једнак је збиру квадрата страница правилног шестоугла и правилног десетоугла који су уписани у исти круг:

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2.$$

(Конструкција златног пресека, правилног десетоугла, правилног петоугла као и докази наведених теорема могу се наћи у уџбеницима геометрије за гимназије, када се геометрија изучавала као наставни предмет, рецимо у: Геометрија за други разред гимназије природно-математичког смера од Војислава Михајловића).

Израчунајмо страницу a_5 правилног петоугла уписаног у круг полупречника R:

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}),$$

дакле $a_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Посматрајмо карактеристичан троугао за правилан петоугао уписан у круг полупречника R, сл. 4. Биће

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{a_5}{2} : R = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} : R = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$\cos^2\dfrac{\pi}{5} = 1 - \dfrac{10-2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$. Из $\cos\dfrac{2\pi}{5} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{5} - 1$ добијамо $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ и даље као у решењу 2.