др Драган Трифуновић

КРАТКА ПРИЧА О ФАКТОРИЈЕЛУ

Нека је $\mathbf{N}$ скуп природних бројева и $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Под факторијелом у ознаци $F(n)$ подразумевамо пресликавање $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_0$ тако да је

$$F(0) = 1$$

и

$$F(n) = F(n-1) \cdot n, \qquad n \geqslant 1.$$

Нпр. $F(3) = F(2) \cdot 3 = F(1) \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Ако за факторијел прихватимо данашњу ознаку $n!$, тада горња дефиниција има облик

$$0! = 1 \quad \text{и} \quad n! = (n-1)!\, n, \quad n \geqslant 1.$$

Наведнимо да се често пише

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Назив за знак $n!$ долази од речи factor = множилац, а чита се факторијел или факторијал, што зависи од језичке основе.

Француски математичар Луј Арбогаст (Louis François Arbogast, 1759–1803), велики пријатељ Монжа (Gaspard Monge, 1746–1818) коме је знатно помогао да сачува *тајну* нацртне геометрије, први је увео термин факторијел (factorielle) са горе наведеним значењем. То је урадио у својој познатој књизи о диференцијалном рачуну *Calcul des Dérivations* из 1800. године.[1] Нешто доцније, 1808. године, уведено је обележавање факторијела помоћу знака узвика ! у облику $n!$. На пример, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Ово је учинио немачки математичар Крамп (Christian Kramp, 1760–1826). Крамп је можда ускликнуо када је видео брзину растења и величину бројева $n!$ — како је то говорио професор Ђуро Курепа (1907–1995).

Симбол за факторијел „!“ преузет је из природног језика и припада класи симбола математичког писма који постоје и у општем фонду књижевног језика,

[1] Арбогаст је познат још по томе што је у поменутој књизи увео ознаку $D_x y$ за први извод. Ово обележавање је прихватио Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857) и афирмисао га.

дакако, са различитим значењем.[2] Иначе, није нам познато како је Крамп дошао на идеју да употреби обичан интерпункцијски знак за симбол факторијела. Уосталом, правописни знаци природног језика скоро су сви ушли у састав математичке семјотике (рецимо, $\cdot$, $:$, $-$, ! итд.).

Међутим, у 19. веку Крампово обележавање $n!$ није прихваћено. Тако је за факторијел Гаус (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) користио ознаку $\Pi(n)$, нпр. $\Pi(6) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$, а Јакоби (Carl Gustav Jacobi, 1804–1851) ознаку Π_n. У енглеској литератури тог времена налазимо ознаку $\llcorner n$, рецимо $\llcorner 4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$. У делу *Ars combinatoria* из 1666. године Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646–1716) при излагању броја комбинација од n елемената k-тог разреда, не употребљава ознаку за факторијел, већ пише

$$1\frown 2\frown 3\frown etc\frown k,$$

што има значење $k!$.

У нашој литератури факторијел се по први пут јавља у књизи Димитрија Нешића (1836–1904) *Наука о комбинацијама* (Београд 1883, стр. 140). Нешић дефинише овај број, користи се ознаком $n!$, али има и извесних наивности. Рецимо, када жели да докаже да је $0! = 1$ не слутећи да се овај податак узима по дефиницији.

За време Првог светског рата, тачније 1916. године, Савет Лондонског математичког друштва предложио је да се факторијел обележава исто онако како је 1808. године предложио Крамп, значи са $n!$. То је учињено документом *Suggestion for Notation and Printing*, које је Друштво издало исте 1916. године. Занимљиво је приметити да је овом *Сугестијом* предложен и изговор знака $n!$ и то: n–усхићеност.[3]

*

Године 1952. Ђуро Курепа је увео „леви факторијел“ дефиницјом

$$!\,n = \sum_{k=0}^{n-1} k!,$$

односно

$$!\,n = 0! + 1! + 2! + \cdots + (n-1)!,$$

што је прилично обрађивано иако леви факторијел и даље тражи нове посленике.[4]

[2] Исти је случај и са речима. Рецимо, то су речи: отворено, затворено, сито, филтер и друге. Било би значајно саставити речник математичких речи (термина) које су преузете из обичног књижевног језика.

[3] Према Н. В. Александрова, *Математические термины*, Москва 1978. Поменимо овом приликом да је овај исти Савет Лондонског математичког друштва 1907. године доделио златну диплому Михаилу Петровићу (1868–1943) за проналазак аналогне рачунске машине за решавање шире класе обичних диференцијалних једначина првог реда на принципу кретања течности у одређеним судовима, а потапањем чврстих тела различитог облика и величине.

[4] О левом факторијелу консултовати Math. Balkanica 4 (1974) и тамо даље. Наведимо завидан податак и признање професору Курепи, да су поједини рачунари на Западу уградили на тастатуру дирку са ознаком $\mathcal{K}(n)$ која је на излазу доносила вредност Курепиног левог факторијела за жељено n.

Занимљив је и следећи резултат:

Сваки природан број a може се јединствено представити у облику

$$a = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!,$$

где су a_k цели бројеви, $0 < a_k < k$ и $a_n \neq 0$.[5] Оваква репрезентација броја a за $a_k = 1$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ узима облик Курепиног левог факторијела $!n - 0!$. Сигурно је овде од интереса и уопштење факторијела преко гама функције $\Gamma(n) = (n-1)!$, што се може продужити у комплексној анализи.

Курепина идеја да се симбол пребаци на леву страну јавља се у математици још 1882. године, када је Герлах (H. Gerlach) увео итерирани степен обележавајући га стављањем изложиоца на леву страну[6]

$$^{n}a = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{n \text{ пута}}, \qquad a \in \mathbf{R}^{+} \setminus \{0\}.$$

*

Поред **преношења** знака „!“ на леву страну, наводимо и случај када се овај знак „**удвостручава**“, рецимо 17!!.

У математичкој семјотици посебно се проучава случај удвостручавања симбола. Рецимо, симбол двоструког интеграла и др. Удвостручавање симбола може се, понекад, и избећи, као што се то ради код коначних диференција $\Delta\Delta y = \Delta^2 y$ или код диференцијала $ddy = d^2 y$.

Према усвојеној конвенцији, удвостручени факторијел $n!!$ има значење битно различито од значења обичног факторијела $n!$. То значење није ни у ком смислу итерација обичног факторијела. Наиме, симбол $n!!$ означава производ свих парних бројева од 2 до n или производ свих непарних бројева од 1 до n, према томе да ли је број n паран или непаран. Дакле,

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k),$$
$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1).$$

У горе наведеном примеру имамо

$$17!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17.$$

Симбол $(n!)!$, међутим, означава факторијел броја $n!$. Тако је, нпр. $4!! = 2 \cdot 4 = 8$, док је $(4!)! = 24!$.

*

[5] В. Е. Колосов, Квант 1 (1984), стр. 42.

[6] О итерираном степену погледати: Б. Петронијевић, *Логичке примедбе о четвртој аритметичкој операцији*, Глас СКА, књ. CLXXIX, Београд 1939, стр. 31–39; H. Gerlach, *Zur vierten Rechnungestufe*, Zeit. für den Math. und Natur. Underricht, 13 (1882), S. 423–436; Д. Трифуновић, *Примедба о дефиницији итерираног степена*, Математика 19 (1990), 2, стр. 48–50.

Запажамо следећу битну особину факторијела. За $n \geqslant 5$ број $n!$ завршава се бар једном нулом, за $n \geqslant 10$ бар двема нулама итд. Наиме, уколико n расте, број $n!$ завршава се све већим бројем нула. У ствари, факторијел $n!$ има особину да се његов запис завршава великим бројем нула чим је n нешто већи број. Рецимо, $188!$ се завршава са 45 нула.

Ако са $z(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, означимо број нула којима се завршава број $n!$ (узимајући да је $z(n) = 0$ кад се $n!$ не завршава нулом), јасно је да можемо писати

$$n! = a_n \cdot 10^{z(n)},$$

где је a_n природан број чија последња цифра није нула. „Емпиријским" поступком, тј. израчунавањем извесног броја вредности факторијела $n!$, установили смо да се обе вредности a_n и $z(n)$, па и њихове дужине (бројеви цифара) *брзо* увећавају са порастом броја n. При овоме је, као што те „пробе" показују, увећавање дужине броја a_n, коју ћемо обележити са $\overline{a_n}$, знатно брже од увећавања дужине нула $z(n)$. На пример, за већ поменути број $188!$ налази се да је $\overline{a_n} = 303$ и $z(n) = 45$. Ове наше увиде илуструје следећа таблица са вредностима $z(n)$ и $\overline{a_n}$ добијеним израчунавањем броја $n!$ помоћу рачунара.[7]

n	$z(n)$	$\overline{a_n}$
10	2	5
20	4	15
30	7	26
40	9	39
50	12	53
60	14	68
70	16	85
80	19	100
90	21	118
100	24	134
150	37	226
200	49	326

Од извесног је интереса, теоријског и практичног, да се ближе одреде бројеви $n!$, a_n, $\overline{a_n}$ и $z(n)$. О овом настојању писали смо раније, 1986. године.[8]

[7]Писац ових редова је на рачунару CII–10070 године 1971. добио све вредности $n!$, $\overline{a_n}$ и $z(n)$ за $1 \leqslant n \leqslant 300$. Нешто доцније, у Math. Balkanica 4 (1974) овај прорачун је знатно проширен уносећи и вредности за $!n$.

[8]Д. Трифуновић, Д. Адамовић, *Неке напомене о факторијелу*, Математика 15 (1986), 1, стр. 37–44.