ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

др Весна Јевремовић

ЗАДАЦИ ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

На једном од такмичења из математике за ученике средњих школа било је више задатака из геометрије — за сваки разред по два задатка. Овде ћемо дати решења неких задатака, различита од оних из одговарајућег Билтена.

1. Основице једнакокраког трапеза $ABCD$ су $AB = 12\,\mathrm{cm}$ и $CD = 3\,\mathrm{cm}$. Дужи SC и SD, где је S средиште дужи AB, секу редом дијагонале BD и AC у тачкама P и Q. Наћи дужину дужи PQ.

Решење. Троуглови DCQ и SAQ су слични (сл. 1). Како је $AS = 6\,\mathrm{cm}$, $DC = 3\,\mathrm{cm}$, следи $DQ : QS = 1 : 2$. Троуглови DCP и BSP су слични, па је $CP : PS = 1 : 2$. На основу тога је $PQ \parallel CD$. Из сличности троуглова SQP и SDC следи $QP : DC = 2 : 3$, па је $PQ = 2\,\mathrm{cm}$.

Сл. 1

Сл. 2

2. Дат је троугао ABD у коме је $\angle ABD = 120^\circ$, а на страници AD је одређена тачка C, таква да је $AB = CD = 1$ и $\angle ABC = 90^\circ$. Наћи AC.

Решење. Нека је $DE \perp AB$, $E \in AB$ (сл. 2). Из сличности троуглова ABC и AED, уз ознаке $AC = x$, $BE = y$ и пошто је $AB = CD = 1$, добијамо

$$1 : x = (1 + y) : (1 + x),$$

одакле је $y = 1/x$. Даље је $BD = 2y$ (из $\triangle BED$), па применом косинусне теореме на $\triangle ABD$ добијамо

$$(x + 1)^2 = 1^2 + (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ.$$

Одатле је $(x + 2)(x^3 - 2) = 0$, и решење је $x = \sqrt[3]{2}$.

3. У равни је дат квадрат $ABCD$ странице a. Права p сече страницу AB у тачки M, а страницу BC у тачки N. Њој паралелна права q сече странице AD и CD у тачкама P и Q. Ако је одстојање правих p и q једнако a, израчунати угао између правих NP и MQ.

Прво решење. У четвороуглу $ACQP$ је $\angle APQ + \angle PQC = 270^\circ$ (1) (сл. 3). Нека су M_1 и M_2 подножја нормала из M на q и CD. Како је $MM_1 = MM_2 = a$, следи да су правоугли троуглови MM_1Q и MM_2Q подударни, па је $\angle M_1QM = \angle M_2QM = \beta$ (2). Аналогно, конструисањем нормала из N на AD и q, добијамо $\angle APN = \angle NPQ = \alpha$ (3). Из (1), (2) и (3) добијамо $\alpha + \beta = 135^\circ$, па је у троуглу PQY, $\angle PYQ = 45^\circ$.

Сл. 3

Сл. 4

Друго решење. Поставимо координатни систем тако да је координатни почетак у темену A, а тачке B и D да припадају координатним осама (сл. 4). Нека је $M(t, 0)$, Једначина праве p је: $y = \operatorname{tg}\varphi(x - t)$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, па је тачка $R = p \cap BC$, тачка са координатама $R(a, (a - t)\operatorname{tg}\varphi)$. Даље, нека је M' подножје нормале из M на q, а M'' подножје нормале из M' на Ox. Како је $\angle MM'M'' = \varphi$ и $MM' = a$, то је $M'(t - a\sin\varphi, a\cos\varphi)$, па је једначина праве q: $y - a\cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi(x - t + a\sin\varphi)$. Одатле добијамо координате тачака $P\left(0, \dfrac{a}{\cos\varphi} - t\operatorname{tg}\varphi\right)$ и $Q\left(t + \dfrac{a\cos\varphi - a}{\sin\varphi}, a\right)$.

Сада одредимо угао α између вектора $\overrightarrow{MQ}$ и $\overrightarrow{NP}$, Имамо да је $\overrightarrow{MQ} = a\left(\dfrac{\cos\varphi - 1}{\sin\varphi}, 1\right)$, $\overrightarrow{NP} = a\left(-1, \dfrac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$. Даље је,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{NP}}{|\overrightarrow{MQ}| \cdot |\overrightarrow{NP}|} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi - 1}{2\sqrt{(1 - \cos\varphi)(1 - \sin\varphi)}} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - (\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2})}{2\sqrt{(1 - \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2})(1 - 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2})}} = \frac{-2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2})}{2\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}|\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}|},$$

па је $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$ и $\alpha = 45^\circ$. Искористили смо чињеницу да је $\varphi \in (0, \pi/2)$ и $|\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}| = -(\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2})$.

Напомена. Координатни систем можемо увек поставити тако да угао праве p и осе Ox буде из интервала $(0, \pi/2)$.