

Здравко Ф. Старц

## ОСНОВНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ИДЕНТИЧНОСТИ

Час обраде у II разреду Пољопривредне школе у Вршцу

НАПОМЕНА. Обрада наставне јединице заснива се на идеји педагога В. Ф. Шаталова да две активности истовремено није могуће радити; ученик или прати наставниково излагање или самостално ради.

Образовни задатак теме је да ученици схвате и усвоје доказе тригонометријских идентичности:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Ученици треба да разумеју решавање следећих основних задатака:

ЗАДАТАК 1. Одредити  $\cos \alpha$  ако је дато  $\sin \alpha$ .

ЗАДАТАК 2. Одредити  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  ако је дато  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Васпитни задатак је да ученици развијају математичко мишљење и правилно закључивање, да стичу навике самосталног рада и упорности у раду.

### Структура часа и садржај рада

*Уводни део часа (5 минута)*

У уводном делу часа поновити дефиниције тригонометријских функција помоћу правоуглог троугла и Питагорину теорему применом графофолије бр. 1.

Наставник саопштава ученицима шта ће се радити и објашњава начин рада на часу.

ГФ. 1

*Главни део часа (око 33 минута)*

Наставник доказује на табли тригонометријску идентичност  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Ученици прате наставниково излагање и при том ништа не пишу у својим свескама. По завршетку наставниковог излагања брише се доказ на табли и ученици самостално понављају доказ у својим свескама. После краћег времена ученици упоређују свој рад са текстом на графофолији бр. 2.

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 \quad / : c^2 \\
 \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= 1 \\
 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 &= 1 \\
 \frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} &= \cos \alpha \\
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\
 \text{ГФ. 2}
 \end{aligned}$$

Наставник очекује од ученика да из последње идентичности изразе функцију синус преко косинуса и обратно.

Наставник на табли објашњава решавање следећег задатка.

ЗАДАТАК 1. Ако је  $\sin \alpha = 4/5$ , одредити  $\cos \alpha$ .

и при том ученици само прате наставников рад. По брисању текста са табле, ученици треба да самостално понове решење задатка. После краћег времена ученици упоређују свој рад са текстом на графофолији бр. 3.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

ГФ. 3

Наставник доказује идентичност  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Потом ученици самостално доказују ову идентичност и после краћег времена упоређују свој рад са текстом на графофолији бр. 4.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}, & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \\
 \frac{a}{c} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha, & & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\
 \text{ГФ. 4}
 \end{aligned}$$

Наставник на табли доказује идентичности  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ . Потом ученици самостално доказују ове идентичности и после краћег времена упоређују свој рад са текстом на графофолији бр. 5.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a}, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} \\
 \frac{b}{c} = \cos \alpha, \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha, & & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\
 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \\
 \text{ГФ. 5}
 \end{aligned}$$

Наставник објашњава решавање следећег задатка.

ЗАДАТАК 2. Ако је  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ , одредити остале тригонометријске функције угла  $\alpha$ .

По брисању текста са табле, ученици треба да самостално понове решавање задатка. После краћег времена ученици упоређују свој рад са текстом на графофолијама бр. 6 и бр. 7.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2, \quad \sin \alpha = 2 \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$5 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}$$

ГФ. 6

ГФ. 7

*Завршни део часа (око 7 минута)*

Поновити формулацију основних тригонометријских идентичности.

Поновити типове задатака који се решавају применом тригонометријских идентичности.

*Домаћи рад:*

- за све ученике:
  1. Самостално доказати основне тригонометријске идентичности.
  2. Задаци из уџбеника 17.а) и 18.а) на стр. 15.
- задатак по избору:
  3. Доказати идентичности

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Војводић, Р. Деспотовић, В. Петровић, Р. Тошић, Б. Шешеља: *Математика за II разред средње школе*, Нови Сад, Београд 1991.
- [2] Педагогический поиск, «Педагогика», Москва 1988.