В. Болтјански, Г. Глејзер, И. Ваљцева, С. Саакјан

ФУНКЦИЈА

У курсу алгебре био је разматран појам *функције*. Најчешће се функције задају једнакостима облика

$$y = 3x - 1, \quad y = 2x^2 - 3x + 5, \quad y = 1 - x^2, \quad y = \frac{5}{x} + |x|,$$

на чијој левој страни се налази промењлива y (функција), а на десној страни неки израз који садржи промењливу x (аргумент), а такође бројеви и знаци операција.

Скуп свих реалних бројева, чијом заменом уместо x на десној страни су изводљиве све наведене операције, зове се *област дефинисаности* дате функције.

За сваки број x_0 који припада области дефинисаности може се наћи вредност десне стране; она се назива *вредношћу функције* за $x = x_0$ (или вредношћу функције у тачки x_0). Често се десна страна функције означава са $f(x)$. Вредност функције у тачки $x = x_0$ се означава са $f(x_0)$.

Пример 1. Посматрајмо функцију $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Област дефинисаности те функције састоји се од свих бројева за које је поткорени израз ненегативан, тј. $1 - x^2 \geqslant 0$, или $x^2 \leqslant 1$. Јасно је да она представља сегмент $[-1; 1]$. Стављајући $x = -1$, налазимо $f(-1) = \sqrt{1 - (-1)^2} = 0$.

Аналогно се налазе вредности функције у другим тачкама, на пример: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(1/2) = \sqrt{3}/2$.

Често се за област дефинисаности функције траже неки додатни захтеви, везани са конкретним садржајем задатка.

Пример 2. На брду висине h_0 постављено је артиљеријско оруђе из кога је изведен хитац у хоризонталном правцу. Почетна брзина пројектила у моменту избачаја $t_0 = 0$ једнака је v_0, сл. 1. Ако се занемари отпор ваздуха, тада је, као што је познато из курса физике, висина $h(t)$ пројектила у моменту t одређена формулом $h(t) = h_0 - \dfrac{gt^2}{2}$, а домет $s(t)$ (по хоризонтали) формулом $s(t) = v_0 t$.

Тиме је и одређена трајекторија лета пројектила.

Верујемо да ће један од могућних приступа увођењу појма функције у средњу школу, понуђен кроз овај текст, заинтересовати читаоце часописа (прим. уредн.).

Сл. 1

Математички су обе функције $s(t)$ и $h(t)$ (линеарна и квадратна) дефинисане за свако реално t. Међутим, по смислу задатка на t се налажу допунски услови. Најпре, лет пројектила разматра се само за $t \geqslant 0$. Поред тога, ако је t_1 момент када пројектил пада на земљу, то значи да се лет врши само за $t \leqslant t_1$. На тај начин, функције $s(t)$ и $h(t)$ по смислу задатка треба посматрати само на сегменту $[0; t_1]$.

Некад се функција задаје разним формулама на посебним интервалима своје области дефинисаности. На пример, функција $y = |x|$ дефинише се на следећи начин:

$$y = \begin{cases} x, & \text{за } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{за } x < 0. \end{cases}$$

Важан и геометријски јасан начин представљања функција јесте њен *график*.

График функције $y = f(x)$ је скуп свих тачака $(x; y)$ координатне равни код којих апсциса x припада области дефинисаности посматране функције, а ордината y је једнака вредности функције у тачки x.

Сл. 2

Сл. 3

Из курса алгебре су познати графици линеарне, квадратне и неких других функција. На пример, на сл. 2 представљен је график функције $y = 2x - 3$, а на сл. 3 график функције $y = x^2 - 7x + 10$.

У курсу алгебре и почетака анализе биће размотрени графици многих других функција и, што је посебно важно, биће дати општи методи испитивања функција и конструкције њихових графика.

На основу облика графика функције може се судити о низу њених својстава.

Сл. 4 Сл. 5

Неке функције имају својство да им је график симетричан у односу на ординатну осу, сл. 4. Такве функције називамо *парним*. Примери парних функција су функције $y = x^2$, сл. 5, $y = |x|$, сл. 6. Функција $y = \sqrt{1 - x^2}$, о којој смо говорили више, такође је парна. Њен график је приказан на сл. 7.

Сл. 6 Сл. 7

Још једну важну класу функција чине *непарне* функције. Оне имају својство да им је график симетричан у односу на координатни почетак, сл. 8.

Сл. 8 Сл. 9 Сл. 10

Примери непарних функција су функције $y = x$, сл. 9, $y = x^3$, сл. 10.

Посматрајмо још две класе функција.

Дефиниција 1. Функција $y = f(x)$ назива се *ограниченом одоздо* ако постоји такав број c, да је $f(x) \geqslant c$ за све x који припадају области дефинисаности те функције.

По облику графика може се закључити да ли је функција $f(x)$ ограничена одоздо. То ће бити у том случају када постоји таква хоризонтална права да се цео график налази изнад ње, сл. 11. Примери функција ограничених одоздо су $y = x^2$, сл. 5, $y = |x|$, сл. 6, $y = \sqrt{x}$, сл. 12.

Сл. 11

Сл. 12

Дефиниција 2. Функција $f(x)$ назива се *ограниченом одозго* ако постоји такав број c, да је $f(x) \leqslant c$ за све x који припадају области дефинисаности функције.

График такве функције налази се цео испод хоризонталне праве $y = c$, сл. 13. Као примери могу да послуже функције $y = -x^2$, сл. 14, $y = 2 - |x|$, сл. 15.

Сл. 13

Сл. 14

Функција која је истовремено ограничена одозго и ограничена одоздо назива се просто *ограниченом* функцијом.

Сл. 15

Сл. 16

График такве функције цео се налази у траци између неке две хоризонталне праве, сл. 16. Као пример може да послужи функција $y = \sqrt{1-x^2}$, сл. 7.

При испитивању функције важно је знати на којим интервалима она расте а на којима опада. Подсетимо се да се функција $f(x)$ назива *растућом* на неком инетрвалу, на пример на сегменту $[a; b]$ ако за свако x_1, x_2 који припадају том сегменту, из неједнакости $x_2 > x_1$ следи да је $f(x_2) > f(x_1)$, сл. 17.

Сл. 17 Сл. 18

Аналогно се дефинише *опадање* функције на неком интервалу, сл. 18. Тако је функција чији је график представљен на сл. 19 растућа на интервалу $(-\infty; a]$, опадајућа на сегменту $[a; b]$ и поново растућа на интервалу $[b; \infty)$.

Сл. 19 Сл. 20

У курсу алгебре и почетака анализе биће дати општи методи налажења интервала растења и опадања функција.

Задаци

1. Која функција се назива линеарном? Шта је њена област дефинисаности и скуп вредности? Који је облик графика линеарне функције?

2. Који је геометријски смисао коефицијената k и b у изразу за линеарну функцију $y = kx + b$? Како је постављен график те функције за $k < 0$, $k > 0$, $k = 0$? Наведите примере.

3. За које вредности k график функције $y = kx$ сече праву $y = x + 2$? Наведите пример и прикажите цртежом тај случај.

4. За које вредности k је график функције $y = kx + 3$ паралелан правој $y = -x$? Илуструјте цртежом задатак.

5. Нацртајте график функције:

а) $y = 0{,}2x + 1$; б) $y = -0{,}2x + 1{,}4$.

6. Докажите да је график функције $y = kx + b$ права.

7. Шта се подразумева под облашћу дефинисаности функције? Нађите област дефинисаности функција

а) $y = \sqrt{x-2}$; б) $y = \dfrac{5}{x-2}$.

8. Која функција се назива квадратном? Која је њена област дефинисаности?

9. Помоћу којих формула се израчунавају координате темена параболе $y = ax^2 + bx + c$?

10. Одредити интервале растења и опадања функције и њене највеће и најмање вредности:

а) $y = 2x^2 - 4x + 1$; б) $y = -x^2 + 2x + 4$;

в) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + 4x + 7$; г) $y = -\dfrac{3}{2}x^2 + 3x + 2$.

11. Шта се подразумева под графиком функције? Нацртајте график произвољне функције с области дефинисаности $[-3; 5]$ и скупом вредности $[1; 4]$.

12. Нацртајте график функције:

а) $y = -x^2 + 2$; б) $y = x^2 - 2x + 1$; в) $y = x^2 + 3$;

г) $y = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5}x^2$; д) $y = 4x^2 - 6x + 9$; ђ) $y = 0{,}5x^2 - 2x$;

е) $y = x^2 + 2x - 3$; ж) $y = -0{,}5x^2 - x + 3$; з) $y = x^2 + 2x + 3$;

и) $y = -x^2 - 4x + 5$; ј) $y = 0{,}5x^2 + 2x - 5$.

13. Одредити област дефинисаности и скуп вредности функције задате формулом $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$. Како се зове график ове функције? Како је он постављен у зависности од вредности k?

14. Да ли су једнаке области дефинисаности функција

$$y = 2x \qquad \text{и} \qquad y = \frac{1}{x} + 2x - \frac{1}{x}\ ?$$

У чему се разликују графици тих функција?

15. Нацртати графике функција

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{4}{x}$; в) $y = -\dfrac{6}{x}$.

Одредити интервале растења и опадања тих функција.

16. Одредити област дефинисаности функција:

а) $y = \sqrt{3x - 7}$; б) $y = \sqrt{5 - 2x}$; в) $y = \sqrt{x^2 - 9}$;

г) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{x+2}$; д) $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1}$; ђ) $y = \sqrt{3x - x^2}$;

е) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{5-x}}$; ж) $y = \sqrt{\dfrac{4 - 3x - x^2}{x + 4}}$; з) $y = \dfrac{2x}{(x+1)(2x-3)}$;

и) $y = \dfrac{4x - 1}{(x^2+5)(x-4)}$; ј) $y = \dfrac{7}{(x-2)\sqrt{x+1}}$; к) $\dfrac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$.

17. Дата је функција $f(x) = 2x^2 + x - 1$. Наћи

а) $f(1)$; б) $f(0)$; в) $f(-5)$; г) $f(a+1)$.

18. Нацртати график функције $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{за } x \geqslant 0, \\ -x + 1, & \text{за } x < 0. \end{cases}$ Израчунати: а) $f(0)$; б) $f(1)$; в) $f(-2)$.

19. Нацртати графике функција:

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{за } x > 0, \\ -x, & \text{за } x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{за } x \leqslant 0, \\ 2x + 1, & \text{за } x > 0. \end{cases}$

20. Одредити функције задате на сегменту $[a; b]$ чији графици су приказани на сликама 20–22.

Сл. 21

Сл. 22

21. Нацртати графике функција:

а) $y = |x|$; б) $y = |x| + 1$; в) $y = -|x|$;

г) $y = |x - 1|$; д) $y = |x + 2|$; ђ) $y = |x| - 1$;

е) $y = \sqrt{1 - x^2}$; ж) $y = \sqrt{4 - x^2}$; з) $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

22. Која функција се назива парном? Које својство има график парне функције?

23. Која функција се назива непарном? Које својство има график непарне функције?

24. Међу следећим функцијама одредити парне и непарне:

а) $y = 2$; б) $y = 2x^4 + 3x^2 - 7$; в) $y = 2x - x^2$;

г) $y = \dfrac{7}{x}$; д) $y = \dfrac{3x^4}{3x^6 + 7}$; ђ) $y = \sqrt{x^2}$;

е) $y = (\sqrt{x})^2$; ж) $y = |x - 1|$;

з) $y = \begin{cases} -2, & \text{за } x < 0, \\ 2, & \text{за } x \geqslant 0; \end{cases}$ и) $y = \begin{cases} -1, & \text{за } x < 0, \\ 0, & \text{за } x = 0, \\ 1, & \text{за } x > 0. \end{cases}$

25. Доказати парност датих функција и нацртати њихове графике, користећи својство графика парне функције:

а) $y = x^2 - 2|x|$; б) $y = -0{,}5x^2 + 2|x|$.

26. Нацртати график функције:

а) $y = x^2 - 1$; б) $y = x^2 + 1$;

в) $y = x^2 \cdot |x|$; г) $y = -x^2 \cdot |x|$.

27. Формулисати дефиницију ограничености функције. Навести примере ограничених функција и нацртати њихове графике.

28. Нацртати графике следећих функција користећи својства парности или непарности, ограничености, а такође израчунавајући координате неких тачака графика:

а) $y = \dfrac{1}{x^2}$; б) $y = \dfrac{1}{x^3}$; в) $y = -\dfrac{4}{x^2}$; г) $y = -\dfrac{2}{x^2}$;

д) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; ђ) $y = \dfrac{4}{x^2 + 3}$; е) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

29. Нацртати график функције $f(x) = x^2$. Помоћу трансформације тог графика нацртати график функције:

а) $-f(x)$; б) $f(x) + 1$; в) $f(x) - 0{,}5$;

г) $f(x - 1)$; д) $f(x + 1)$; ђ) $2f(x)$;

е) $\dfrac{1}{2}f(x)$; ж) $f(x - 1) + 2$; з) $f(x + 1) - 2$.

30. Нацртати график функције:

а) $f(x) = |x^2 - 2x|$; б) $f(x) = |x^2 - 1| + 1$.