НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
1997, XLII, 3–4, стр. 1–20

др Милосав Марјановић

СХЕМАТСКО УЧЕЊЕ ТАБЛИЦА САБИРАЊА И МНОЖЕЊА — ШТАПИЋИ КАО ДИДАКТИЧКИ МАТЕРИЈАЛ

1. Увод. Таблица сабирања састоји се од свих релација $k+m=n$, где k и m пролазе кроз све вредности једноцифрених бројева, искључујући нулу као у овом оквиру неинтересантан случај, док се таблица множења састоји од свих релација $k\cdot m=n$, где k и m поново пролазе кроз све вредности једноцифрених бројева, искључујући нулу и јединицу као неинтересантне случајеве. Узимајући у обзир комутативност, може се претпосатвити да је $k\leqslant m$, па се тако број ових релација редуцира, и у првом случају износи 45, а у другом 36.

У току наставе, очекује се од ученика да временом меморишу све ове релације и тако науче напамет таблице сабирања и множења. Упоредо с тим, подразумева се меморисање и релација $n-k=m$, $n-m=k$, односно $n:k=m$ и $n:m=k$, а за које можемо рећи да чине таблице одузимања, односно дељења. И док уз већ научену таблицу множења знамо таблицу дељења не размишљајући нимало, дотле таблица одузимања садржи један број случајева у којима ипак, овако или онако, морамо мало поразмислити „тражећи" резултат. Свакако да за то не треба тражити разлог у већем броју (45) релација код сабирања, већ зато постоји друга, логички сасвим јасна основа.

Код таблице множења, знајући n једнозначно су одређени k и m, сем у следећим случајевима

$$12=2\cdot 6=3\cdot 4,\quad 16=2\cdot 8=4\cdot 4,\quad 18=2\cdot 9=3\cdot 6,\quad 24=3\cdot 8=4\cdot 6,$$

у којима имамо по два пара чинилаца (међу једноцифреним бројевима). Код сабирања, пак, кад је $n=10$, имамо пет различитих парова сабирака

$$10=5+5=4+6=3+7=2+8=1+9,$$

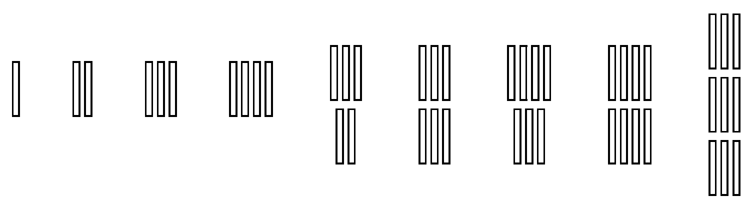
за $n=8$, 9, 11, 12 по четири, за $n=6$, 7, 13, 14 по три, за $n=4$, 5, 15, 16 по два пара, а сабирци су једнозначно одређени само кад је $n=2$, 3, 17, 18.

Код дељења, чим чујемо „63", већ имамо „припремљен" пар $(7,9)$ из кога одабирамо количник чим чујемо шта је делитељ. Код одузимања, кад, на пример, чујемо „11" не можемо „припремити" четири различита пара, па после податка о умањиоцу трагамо у мислима по таблици сабирања или, што је чест случај, прибегавамо лаком усменом рачунању разлажући умањилац на подесне сабирке.

У овом раду, наш циљ је да разрадимо коришћење штапића који се слажу у правилне гомилице чији облик сугерише бројност. Та разрада представља паралелну једнозначну кореспонденцију између рада са штапићима (манипулативне активности из којих резултирају визуелне представе), записивања одговарајућих израза (формалне активности) и пратећих менталних операција. Менталне схеме које тим путем ученик формира постају основа за формалне (рачунске) операције, а прелази са визуелне представе на математички израз и обрнуто овим путем су прецизно засновани, и самим склопом активности, подстакнути.

У почетној настави математике, значај схематског учења (R. Skemp, [3]) је врло велики, а ми такво учење овде разрађујемо у случају таблица сабирања, одузимања и множења.

2. Бројевне слагалице. Кад скупимо, рецимо, четири објекта, тада нам једна таква колекција „материјализује“ апстрактну идеју броја „4“. Слично цртеж са четири тачке или кружића такође „материјализује“ тај број. Идеја да се цртежом „материјализују“ бројеви је прастара, а древно египатско хијероглифско писмо је један од примера те врсте:



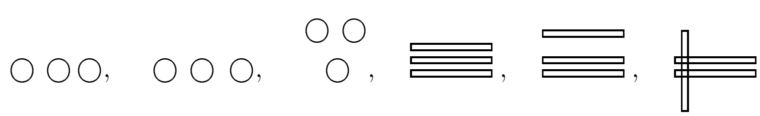
Приметимо да ове „сликане“ гомилице штапића имају свака свој лако препознатљиви облик и да се, структурно, „5“ види као „$3+2$“, „6“ као „$3+3$“, „7“ као „$4+3$“, „8“ као „$4+4$“ и „9“ као „$3+3+3$“.

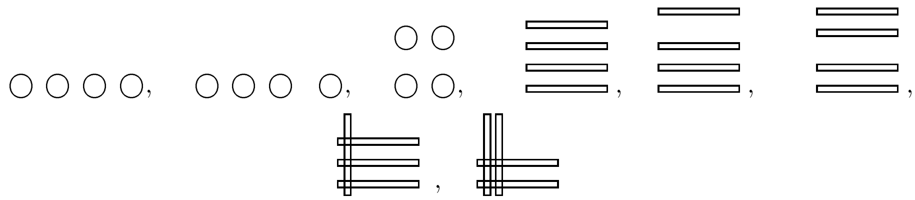
Знамо такође за више система бројевних слика (Busse, Hentchel, Born и др.) који се у току 19. столећа јављају као део Коменианског програма учења почињући са очигледношћу, коју предочавају слике из „сликаног окружења“ (orbis pictus).

Кад „материјализујемо“ идеју броја у чврстом материјалу, тада ћемо имати гомилицу, рецимо, жетона. Такве гомилице имају предност у односу на бројевне слике јер их лако можемо мењати додајући или уклањајући поједине објекте или, пак, вршећи промене преслагањем.

Па, у чему може бити предност штапића у односу на објекте као што су рецимо жетони? Жетоне не слажемо једне преко других, док линијско простирање штапића то омогућује и са њима, и тада, можемо правити правилне гомилице са разговетном структуром.

На пример, бројеве „3“ и „4“ можемо представити следећим гомилицама





па већ овде видимо ту предност штапића коју смо поменули.

Идеја коришћења штапића у циљу представљања бројева није нова, она је врло стара, односно боље је рећи да је прастара. Зато наша иновација није ни на каквом технолошком плану. *Наш дидактички сет је* 20 *пљоснатих, издужених штапића правоугаоног облика, обојених са две стране двема различитим бојама* (плавом и црвеном) и са фино наглашеном бордуром (рецимо црне боје). У овом тексту, ови штапићи биће представљени „празним“ (белим) и „пуним“ (црним) правоугаоницима

Наша иновација је на плану употребе тих штапића у „материјализацији“ менталних и формалних операција везаних за оквир таблица сабирања и множења. Наравно, они се могу користити и шире, за конкретно изражавање аритметичких законитости и правилности као вид „материјализовања“ процедуралног изражавања.

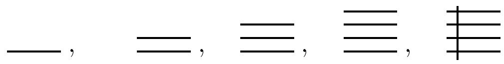
3. Стандардне слагалице. Сваки од следећа четири израза

$$111 - 74, \quad 8 + 11 + 2 + 16, \quad 3 \cdot 7 + 16, \quad 37$$

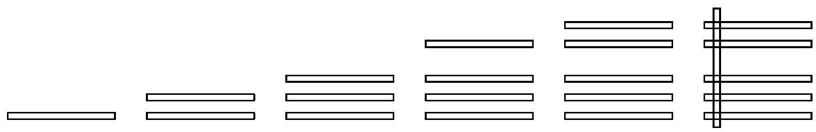
представља један те исти број. На питање који је то број, прави одговор би био „па тај број који тај израз представља“ и у том погледу сви су они потпуно равноправни (а прецизније кажемо да су они бројевно еквивалентни). Друго је питање који је од тих израза за нас најинформативнији, односно који од њих брже подстиче неку нашу интуитивну представу о броју који означава. И тада се ми једнозначно опредељујемо за израз „37“, јер нам сугерише представу о том броју као збиру 3 десетице и 7 јединица. То „слагање“ бројева као збирова јединица, десетица, стотина итд. је стандардно у савременој цивилизацији која се служи декадним бројевним системом, па мислећи у сликама, декадни записи евоцирају у нама најчистије представе о бројности, а што је последица цивилизацијског окружења (и посебно школске обуке), док у неким цивилизацијама у прошлости то није морао бити случај (видети нпр. [4]).

Само *рачунање није ништа друго до ли прелаз са једног израза на једноставнији бројевно еквивалентни, све док се не дође до декадног записа као најједноставнијег.* Заправо та једноставност у подстицању представе о бројности коју имају цифарски записи води нас оном уобичајеном одговору на горе поменуто питање кад, на пример, кажемо да израз „111 − 74“ представља број „37“.

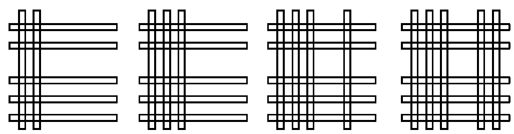
Представљајући неки број гомилицом штапића (или жетона), није неважан облик те гомилице као једно њено глобално својство, па се може начелно рећи да што има више правилности у њеном изгледу тим је њена структура читљивија. А на овом плану, од те структуре очекујемо да што боље рефлектује бројност. Наведимо два врло уобичајена примера, распоред тачкица на доминама или знакове који се користе, рецимо, код пребројавања гласова



Наш следећи корак је да се определимо за начин слагања штапића у гомилице које ћемо звати *стандардне слагалице*, а које ће имати улогу сличну декадним цифарским записима. Тај начин приказујемо следећим сликама



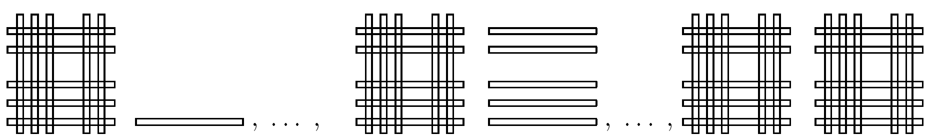
1 2 3 4 5 6



7 8 9 10

Приметимо да смо број 4 структурисали као збир $3+1$, 5 као $3+2$, 6 као $5+1$, 7 као $5+2$, 8 као $5+3$, 9 као $5+4$ и 10 као $5+5$. Истакли смо број 3 као навише заокругљену половину броја 5, а 5 као половину од 10. Посебно се истиче облик слагалица за бројеве 5 и 10 (а што има и своју антропоморфну основу везивањем за број прстију на једној, односно двема рукама).

У складу са двоцифарским записима бројева, стандардне слагалице за бројеве друге десетице чиниће две гомилице, прва која ће представљати 10, а друга број који назначава цифра јединица. То приказују следеће слике



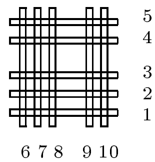
11 15 20

У радној свесци која прати овај чланак, разликоваћемо више поступних корака везаних за рад са штапићима у реалној настави у разреду. А овде поменимо као први такав корак *увежбавање препознавања бројности стандардне слагалице на први поглед.*

За примену у разреду, сваки ученик треба да има свој сет штапића које слаже на клупи испред себе, док учитељев сет чине штапићи веће димензије који се могу јасно видети са сваког места у учионици. Да се ученику олакша формирање слагалице, може се направити картончић са „тлоцртом“, који указује на места за штапиће, а за учитеља се, такође, може предвидети одговарајуће техничко решење те врсте.

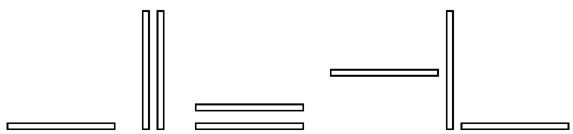
4. Слагање уместо пребројавања. Кад ученику предочимо неки скуп објеката у окружењу и захтевамо да их преброји, онда он у мислима ређа те објекте, један по један, и придружује им, унутрашњим говором или гласно, називе бројева почињући са „један“ и завршавајући са називом броја који придружује последњем објекту. *Пребројавању као (менталној) операцији кореспондентна је активност слагања штапића у стандардне слагалице.*

У техничком смислу, слагање штапића иде по редоследу који приказује следећа слика

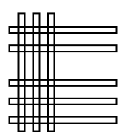


а разлагање у супротном редоследу. На тај начин слагање постаје активност која одговара бројању унапред, а разлагање бројању уназад. Важно је стриктно се држати поменутих редоследа слагања и разлагања и у том смислу треба код ученика култивисати навику.

Претпоставимо да су ученици научили да слажу стандардне слагалице за бројеве до 10 и да их брзо знају да препознају по облику. Тада можемо да истакнемо ефекат правилности стандардних слагалица на више начина. Рецимо можемо набацати штапиће тако да они формирају једну хаотичну гомилицу попут следеће

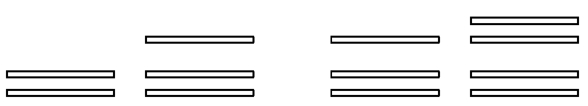


и захтевати да брзо погоде колико је то штапића а да их не пребројавају. Наравно, да већином то неће моћи. Затим ћемо пресложити те штапиће на стандардни начин

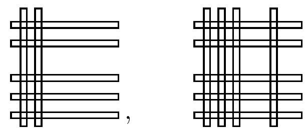


и захтевати да за исто тако кратко време погоде њихов број. Наравно, сад ће већином то моћи.

Као могуће вежбе можемо укључити и случајеве где имамо две гомилице, обе стандардно сложене, као што је



итд. и захтевати да се слагањем, а не пребројавањем, одреди број штапића. Чим се, рецимо горње гомилице, стандардно сложе



видеће се да је то било 7 односно 9 штапића.

Приметимо да су ове вежбе преслагања такође активност путем које истичемо принцип инваријантности броја, тј. да је број својство скупова независно од распореда њихових елемената. Вежбе где се штапићи јављају у двема гомилицама, слагањем у једну представљају предигру за операцију сабирања.

Предност стандардних гомилица у односу на друге системе рада са штапићима (као што је G. Cuisenaire, C. Gattegno [2]), је у истицању структуре коју гомилице сугеришу на више начина. Наравно да је предност и у малом, лаганом сету штапића.

5. Почетно сабирање. Рачунске операције у раној настави везују се за моделе разних ситуација из природног или сликаног окружења, па нема тог дидактичког материјала који би могао да изражава сва та могућа различита значења. Али све те ситуације имају јединствену апстрактну основу и она се, код сабирања, може описати као сагледавање два дисјунктна скупа познате бројности m и n. Задатак сабирања је тада одређивање бројности њихове уније, а коју означавамо изразом $m+n$. Израчунавање збира $m+n$ је одређивање декадног записа који је с тим збиром бројевно еквивалентан. Дакле, обрада теме као што је сабирање претпоставља везе са окружењем које изражавају разноврсни текстуални задаци, па се само формално операција сабирања своди на израчунавање збирова облика $m+n$. А то израчунавање заснива се на учењу поступака који све збирове, у корацима, своде на оне које сврставамо у таблицу сабирања. Тако се ти збирови из таблице сабирања истичу као најосновнији и самим тим најважнији. Њих, на крају, морамо да знамо напамет.

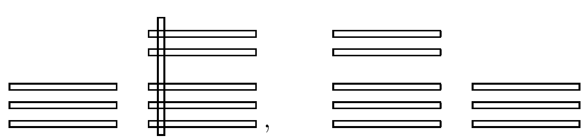
Неформално, сабирање тече у три корака:

(I) препознавање ситуације (на коју реагујемо сабирајући)

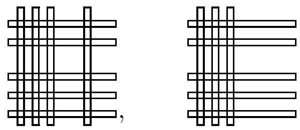
(II) формирање израза $m+n$ (пишући га или га говорно изражавајући)

(III) израчунавање израза $m+n$ (сводећи га на декадни запис).

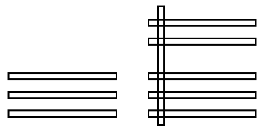
Радећи са штапићима, ситуацију на коју реагујемо сабирајући чиниће две стандардно сложене гомилице које стоје једна поред друге. На пример, двојке гомилица као што су:



итд. Истовремено, те двојке гомилица визуелно изражавају збир $m+n$, тј. у наведеним примерима збирове $3+6$ односно $5+3$. Израчунавању одговара слагање двојки гомилица у једну, а што би у наведеним примерима биле гомилице:

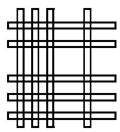


Хоћемо ли да паралелно са овим манипулативним активностима теку и формалне операције, можемо то изнудити користећи се држачима места. На пример, уз двојку гомилица стоје држачи и знак „+“ изнуђује писање израза:



___ + ___

Кад ученици напишу израз „3+6“, ми у следећем кораку захтевамо да се штапићи сложе у једну гомилицу и питамо: „а колико је то“, додајући знак једнакости:



$\underline{\ 3\ } + \underline{\ 6\ } = \underline{\quad}$.

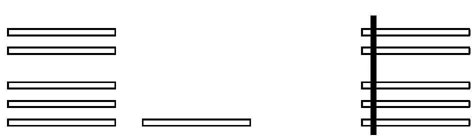
Препознавајући гомилицу, ученици комплетирају једнакост „3+6 = 9“. Наравно, више оваквих вежби налази се у пратећој радној свесци и њих прате варијације оваквих поступака.

Постоје збирови који се лакше памте а међу таквим су посебно важни ови:

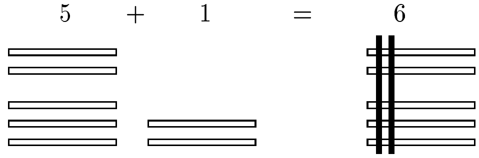
$$5 + 1 = 6$$
$$5 + 2 = 7$$
$$5 + 3 = 8$$
$$5 + 4 = 9$$
$$5 + 5 = 10.$$

Сама структура слагалица такође истиче ове збирове (тј. број 5 има своје значајно место као сабирак), а то можемо још и потенцирати изврћући, при слагању, стране штапића мање гомилице.

Пре слагања После слагања

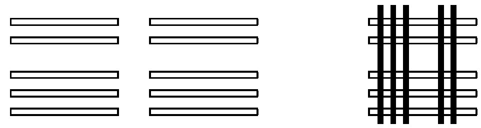


5 + 1 = 6



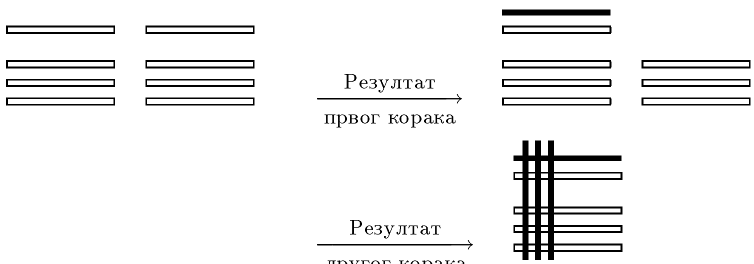
5 + 2 = 7

...



5 + 5 = 10

„Лакше“ уз ове збирове осећамо и на манипулативном плану, јер целу другу гомилицу можемо подићи и пребацити преко прве. У „тежим“ случајевима морамо прво формирати гомилицу која представља број 5 (прелаз преко петице), а затим остатак штапића пребацити. Илуструјмо та два корака:



а што одговара формалним операцијама

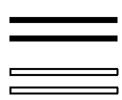
$$4 + \overset{1\quad 3}{\overset{\stackrel{+}{\vee}}{4}} = 5 + 3 = 8.$$

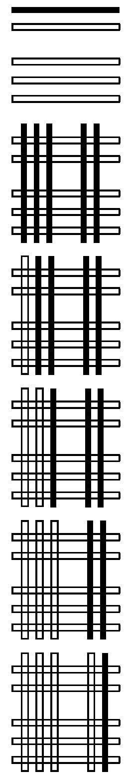
Видимо да се у овим „тежим“ случајевима други сабирак и сам разлаже на сабирке, а први допуњује до 5.

6. Допуњавање и разлагање на сабирке. Кад је дат збир и један сабирак, одређивање другог сабирка је уствари операција одузимања. Али она се у имплицитном облику јавља као „допуњавање“ које се везује за питања као што је ово: колико је 7 до 15?

Иако допуњавање није никаква посебна операција (већ је одузимање), постоје неки посебни случајеви које треба истаћи, а важни су за само сабирање. Следеће слагалице лепо илуструју смисао и питања и одговора везаних за допуњавање до 5 и 10.

Колико је Видимо да је то

3 до 5  2



4 до 5 — 1

5 до 10 — 5

6 до 10 — 4

7 до 10 — 3

8 до 10 — 2

9 до 10 — 1

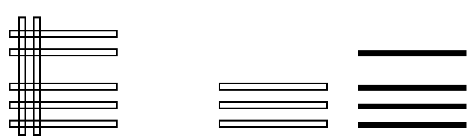
Истакли смо овде све оне случајеве допуњавања који су важни за сабирање једноцифрених бројева.

Разлагање на сабирке је у основи исти задатак као што је био у претходном случају: дат је збир и један сабирак а одређујемо онај други. Тада збир s који је дат у декадном запису изражавамо као $k+m$, тј. пишемо $s=k+m$.

Битно је овде проћи кроз следеће случајеве $s = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9.

Радећи са штапићима, ми ћемо гомилицу разлагати све док не остане она која представља дати сабирак. Уклањајући штапиће преслажемо их у нову гомилицу (обрћући им страну). На пример број 7 разлажемо на сабирке где је један од њих 3:

(било) (буде)

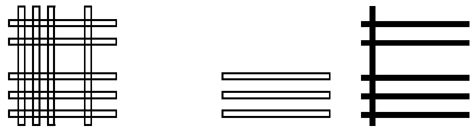


$7 \quad = \quad 3 + 4$

Свако разлагање треба пратити и писањем једнакости $s=k+m$.

За број 9 и један сабирак 3, биће

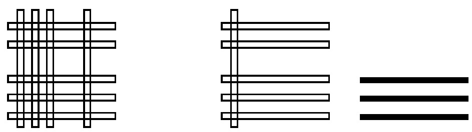
(било) (буде)



$9 = 3 + 6$

Можемо се са ученицима досетити да је у неким примерима, као што је овај задњи, лакше скидати три штапића

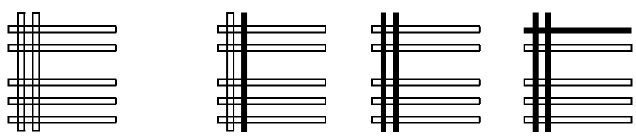
(било) (буде)



$9 = 6 + 3$

а што је опет један вид изражавања комутативног закона (у виду олакшице у манипулативном смислу). Наравно да ће ученици често и без разлагања гомилице моћи усмено да кажу шта је други сабирак. Но, у сваком случају, ове вежбе су важне и чине један од битних корака у сабирању са прелазом преко десетице.

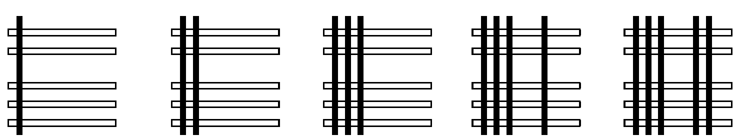
Кад је препознавање гомилица добро, могу се направити картончићи, као овај:



$7 = 6 + \mathbf{1} = 5 + \mathbf{2} = 4 + \mathbf{3}$

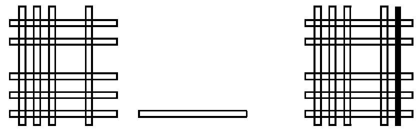
који би илустровали сва ова разлагања.

За бројеве 6, 7, 8, 9, и 10, најважнији сабирак је 5. Одређивање другог пројектују саме стандардне слагалице и видимо га представљеног гомилицом вертикалних штапића. Ако те штапиће истакнемо и бојом, имаћемо



$6 = 5 + 1 \qquad 7 = 5 + 2 \qquad 8 = 5 + 3 \qquad 9 = 5 + 4 \qquad 10 = 5 + 5$

7. Два лака случаја сабирања преко 10. Збирови облика $9 + a$, $a = 1, 2, \ldots, 9$ лако се памте и најједноставнији су пример за сабирање прелазом преко десетице. Збир се формира пребацивањем једног штапића гомилице која представља „a“.

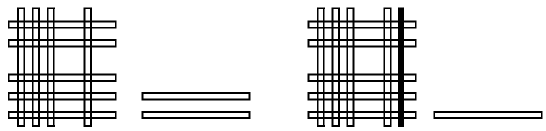


9 + 1 = 10

$9+1=10$

$9+2=11$

$9+3=12$



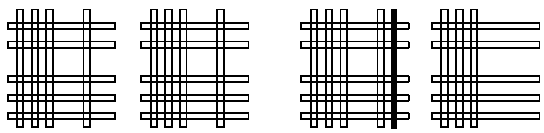
9 + 2 = 11

$9+4=13$

$9+5=14$

$9+6=15$

...



9 + 9 = 18

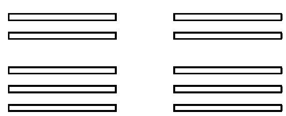
$9+7=16$

$9+8=17$

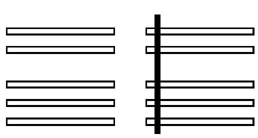
$9+9=18$

(црвени штапић је онај који се пребацује)

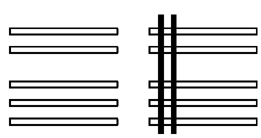
Поред стандардно сложене десетице, њу представља лако препознатљиво „$5+5$“:



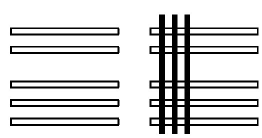
Без преслагања, одмах се виде збирови облика $5+a$, $a=6,7,8,9$. Напишемо ли $a=5+b$, $b=1,2,3,4$, то гомилице за „b“ можемо формирати од црвених штапића, да би се видело стално исто „10“ приказано плавим штапићима:



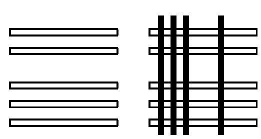
$5+6=11$



$5+7=12$



$5+8=13$



$5+9=14$

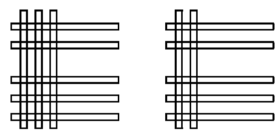
Збир $5+6$ видимо као $10+1$, $5+7$ као $10+2$, $5+8$ као $10+3$ и $5+9$ као $10+4$.

Наравно најлакши збирови са прелазом преко десетице су они облика $10+a$, али њих стално истичемо начином формирања слагалица.

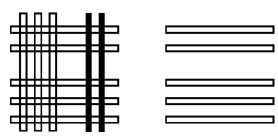
8. Сабирање са прелазом преко десетице. Под овим насловом подразумевамо оне случајеве сабирања два једноцифрена броја кад је њихов збир једнак или већи од десет. Број 10 је тада истакнут и тиме што први сабирак допуњујемо до 10, па преостали део другог сабирка сабирамо са 10 (најлакши случај). Но, у том је важан корак разлагање другог сабирка, што мора бити претходно добро увежбано, на начин како смо то говорили у поглављу 6.

Истицањем правила о размени сабирака, можемо увек претпосављати да је први сабирак једнак или већи од другог.

Радећи са штапићима, поставимо две слагалице једну поред друге. Лева представља могуће већи, а десна могуће мањи сабирак. Узмимо као пример „$8+7$“:



Разлажемо другу гомилицу (превр̂ћући страну штапићима) и слажемо их на месту прве све док не добијемо „10“.



Резултат тада непосредно видимо: 15.

Манипулишући штапићима, ова операција заиста иде лако, па би се могла претворити у „играрију“ ако је не бисмо пратили формалним операцијама. Зато, чим поставимо слагалице, пишемо збир, рецимо „$8+7$“. Кад испребацујемо штапиће, назначимо разлагање другог сабирка, рецимо овако (масно означене цифре су у улози оних које би требало писати црвено):

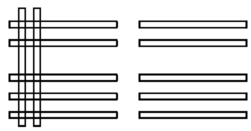
$$\begin{array}{c} \mathbf{2}\quad 5 \\ \stackrel{+}{\bigvee} \\ 8+7 \end{array}$$

а затим пишемо збир $10+a$, где је a преостали део другог сабирка и затим тај збир запишемо декадно као „$1a$“. У примеру који смо одабрали, све то би овако изгледало

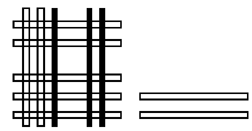
$$\begin{array}{l} \quad\mathbf{2}\quad 5 \\ \quad\ \stackrel{+}{\bigvee} \\ 8+7=10+5=15. \end{array}$$

У примеру „$7 + 5$“, имали бисмо

Пре преслагања



После преслагања



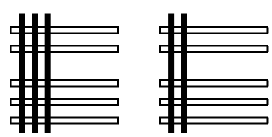
и формално

$$\begin{array}{c} \mathbf{3} \quad 2 \\ \overset{+}{\vee} \\ 7 + 5 = 10 + 2 = 12. \end{array}$$

Помажући се штапићима ученици ће постепено формирати визуелне представе што ће им помоћи да касније изводе такве операције ментално и без стварног присуства штапића. Приметимо, такође, да су штапићи одличан начин да им саопштимо шта све треба да ураде, а да при том избегнемо „придиковање“.

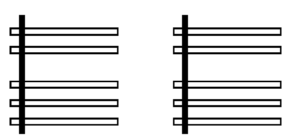
Кад су оба сабирка једнаки или већи од 5, постоји још један начин одређивања збира који се својом лакоћом намеће. За два једноцифрена броја $5+a$ и $5 + b$, њихов збир је $10 + a + b$, па сабирамо само мале једноцифрене бројеве a и b. У слагалицама, представићемо „5“ плавим штапићима, a и b црвеним (и вертикалним).

На пример, сложимо тако „$8 + 7$“:



Видимо „плаво“ „10“, па „сабирамо“ само црвене штапиће.

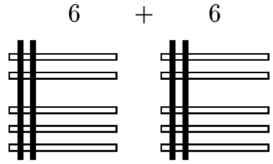
Ово одређивање збира је посебно подесно у случајевима кад имамо једнаке сабирке:



6 + 6

$6 + 6 = 12$

$7 + 7 = 14$



7 + 7

$8 + 8 = 16$

$9 + 9 = 18$

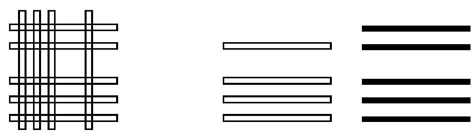
...

а што су, иначе, збирови који се брзо памте.

9. Одузимање. О одузимању се може рећи све оно што смо говорили о сабирању у поглављу 5. То значи да је први корак и код одузимања препознавање ситуације која даје повод одузимању, други састављање израза према подацима о бројности датог скупа и његовог подскупа који „одузимамо“, док је трећи срачунавање разлике у виду декадног записа. Ми се у овом раду ограничавамо само на оквир таблице одузимања и настојаћемо да кореспондентне менталне операције „материјализујемо“ путем штапића и манипулисања са њима.

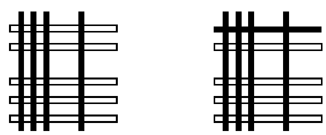
Најнепосреднија идеја „материјализације“ разлике $n - m$ је скидање штапића са гомилице која представља n и слагање на гомилицу која ће представљати m. Да бисмо истакли резултат разлагања, можемо при томе страну штапића извртати. На пример, за разлику „$9 - 5$“, имали бисмо

Пре разлагања По разлагању



Остатак гомилице коју смо разлагали представља $n - m$, а у примеру који смо навели тај остатак представља број 4. Одмах примећујемо недостатак оваквог моделирања, јер гомилица пре разлагања ничим не сугерише разлику $n - m$ (тј. у примеру који пратимо разлику $9 - 5$). Две гомилице које добијамо по разлагању сугеришу ту разлику, али нам умањеник није представљен стандардном слагалицом.

Боља идеја је компоновање слагалице са видљивим умањеником са двобојним штапићима, а што у случају разлике $9-5$, можемо урадити на следећа два начина



$9 - 5$ $9 - \mathbf{5}$

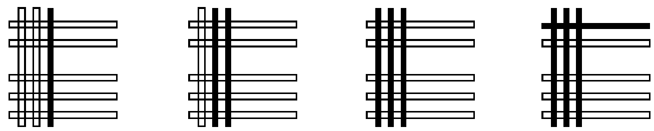
где први начин сугерише схватање разлике као допуне умањиоца до умањеника, а други одузимање од умањеника. Ова два начина су равноправни и некад је један а некад други подеснији. Технички, ми ћемо то записивати пишући „плави“ или „црвени“ (у слогу „масни“) умањилац (и имајући „црвену“ или „плаву“ разлику респективно).

Посматрајмо у оквиру разлика кад је умањеник мањи од 10, следећа два примера у којима се јавља при одузимању прелаз преко 5.

$7 - 6 = \mathbf{1}$ $7 - 5 = \mathbf{2}$ $7 - 4 = \mathbf{1} + \mathbf{2} = \mathbf{3}$ $7 - 3 = \mathbf{2} + \mathbf{2} = \mathbf{4}$

$7 - \mathbf{1} = 6$ $7 - \mathbf{2} = 5$ $7 - \mathbf{3} = 7 - \mathbf{2} - \mathbf{1} = 4$ $7 - \mathbf{4} = 7 - \mathbf{2} - \mathbf{2} = 3$

Приметимо како ове слагалице подесно сугеришу прелаз преко 5 тиме што се црвени штапићи разбијају на оне хоризонтално и оне вертикално постављене. Приметимо такође да је четврта слагалица непотребна, јер су се разлике $7-3$ и $7-4$ јавиле уз трећу.

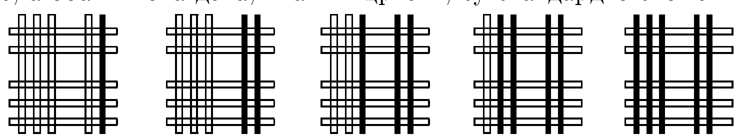


$8-7=\mathbf{1}$ $\quad 8-6=\mathbf{2}$ $\quad 8-5=\mathbf{3}$ $\quad 8-4=\mathbf{1}+\mathbf{3}=\mathbf{4}$

$8-\mathbf{1}=7$ $\quad 8-\mathbf{2}=6$ $\quad 8-\mathbf{3}=5$ $\quad 8-\mathbf{4}=8-\mathbf{3}-\mathbf{1}=4$

Сличан прелаз се јавља још само код разлика $6-2$, $6-4$, $6-3$ и то су најсложенији случајеви одузимања кад је умањеник мањи од 10.

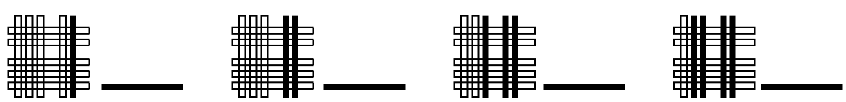
Следеће разлике су важне због прелаза преко десетице, мада се по правилу лако памте, а оба њихова дела, плави и црвени, су стандардно сложени.



$10-9=\mathbf{1}$ $\quad 10-8=\mathbf{2}$ $\quad 10-7=\mathbf{3}$ $\quad 10-6=\mathbf{4}$ $\quad 10-5=\mathbf{5}$

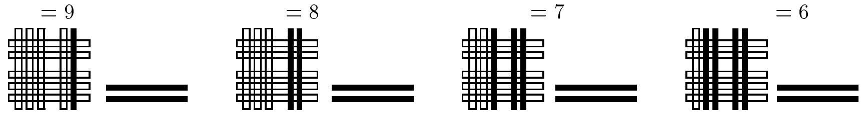
$10-\mathbf{1}=9$ $\quad 10-\mathbf{2}=8$ $\quad 10-\mathbf{3}=7$ $\quad 10-\mathbf{4}=6$ $\quad 10-\mathbf{5}=5$

10. Разлике кад је умањеник већи од десет. У свим случајевима кад је умањеник већи од десет, одузимање мора да иде прелазом преко десетице било да допуњујемо до 10 или одузимамо од 10. Пошто овакво одузимање морамо сматрати тежим, илустроваћемо све могуће случајеве.



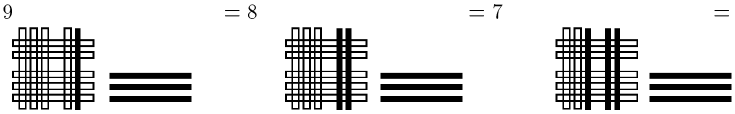
$11-9=\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{2}$ $\quad 11-8=\mathbf{2}+\mathbf{1}=\mathbf{3}$ $\quad 11-7=\mathbf{3}+\mathbf{1}=\mathbf{4}$ $\quad 11-6=\mathbf{4}+\mathbf{1}=\mathbf{5}$

$11-\mathbf{2}=11-\mathbf{1}-\mathbf{1}=9$ $\quad 11-\mathbf{3}=11-\mathbf{1}-\mathbf{2}=8$ $\quad 11-\mathbf{4}=11-\mathbf{1}-\mathbf{3}=7$ $\quad 11-\mathbf{5}=11-\mathbf{1}-\mathbf{4}=6$



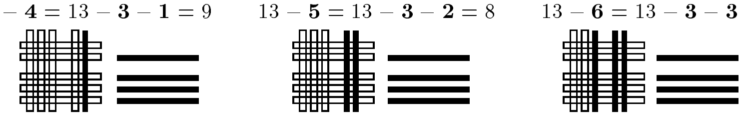
$12-9=\mathbf{1}+\mathbf{2}=\mathbf{3}$ $\quad 12-8=\mathbf{2}+\mathbf{2}=\mathbf{4}$ $\quad 12-7=\mathbf{3}+\mathbf{2}=\mathbf{5}$ $\quad 12-6=\mathbf{4}+\mathbf{2}=\mathbf{6}$

$12-\mathbf{3}=12-\mathbf{2}-\mathbf{1}=9$ $\quad 12-\mathbf{4}=12-\mathbf{2}-\mathbf{2}=8$ $\quad 12-\mathbf{5}=12-\mathbf{2}-\mathbf{3}=7$ $\quad 12-\mathbf{6}=12-\mathbf{2}-\mathbf{4}=6$



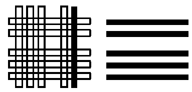
$13-9=\mathbf{1}+\mathbf{3}=\mathbf{4}$ $\quad 13-8=\mathbf{2}+\mathbf{3}=\mathbf{5}$ $\quad 13-7=\mathbf{3}+\mathbf{3}=\mathbf{6}$

$13-\mathbf{4}=13-\mathbf{3}-\mathbf{1}=9$ $\quad 13-\mathbf{5}=13-\mathbf{3}-\mathbf{2}=8$ $\quad 13-\mathbf{6}=13-\mathbf{3}-\mathbf{3}=7$



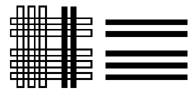
$14-9=\mathbf{1}+\mathbf{4}=\mathbf{5}$ $\quad 14-8=\mathbf{2}+\mathbf{4}=\mathbf{6}$ $\quad 14-7=\mathbf{3}+\mathbf{4}=\mathbf{7}$

$14-\mathbf{5}=14-\mathbf{4}-\mathbf{1}=9$ $\quad 14-\mathbf{6}=14-\mathbf{4}-\mathbf{2}=8$ $\quad 14-\mathbf{7}=14-\mathbf{4}-\mathbf{3}=7$



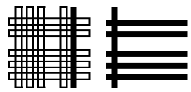
$15 - 9 = \mathbf{1} + \mathbf{5} = \mathbf{6}$

$15 - \mathbf{6} = 15 - \mathbf{5} - \mathbf{1} = 9$



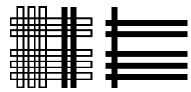
$15 - 8 = \mathbf{2} + \mathbf{5} = \mathbf{7}$

$15 - \mathbf{7} = 15 - \mathbf{5} - \mathbf{2} = 8$



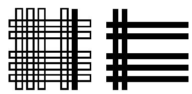
$16 - 9 = \mathbf{1} + \mathbf{6} = \mathbf{7}$

$16 - \mathbf{7} = 16 - \mathbf{6} - \mathbf{1} = 9$



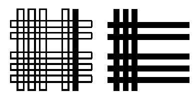
$16 - 8 = \mathbf{2} + \mathbf{6} = \mathbf{8}$

$16 - \mathbf{8} = 16 - \mathbf{6} - \mathbf{2} = 8$



$17 - 9 = \mathbf{1} + \mathbf{7} = \mathbf{8}$

$17 - \mathbf{8} = 17 - \mathbf{7} - \mathbf{1} = 9$



$18 - 9 = \mathbf{1} + \mathbf{8} = \mathbf{9}$

$18 - \mathbf{9} = 18 - \mathbf{8} - \mathbf{1} = 9$

Као допуна наведеним случајевима могле би још бити следеће разлике

$$11 - 5, \quad 11 - \mathbf{6}, \quad 13 - 6, \quad 13 - \mathbf{7}, \quad 15 - 7, \quad 15 - \mathbf{8}, \quad 17 - 8, \quad 17 - \mathbf{9},$$

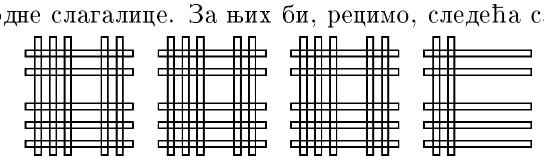
респектујући равноправност одузимања које иде допуњавањем до 10, са оним које иде одузимањем од 10 (случајеви „црвене“ односно „плаве“ разлике).

Сви смо склони да разлику „$11 - 9$“ рачунамо допуњујући, а не као $11 - \mathbf{9}$, а разлику „$11 - 2$“ баш као $11 - \mathbf{2}$.

Како је коме лакше рачунати зависи, наравно, од индивидуалних склоности (често и спонтано стечених), али ипак могло би се начелно рећи: *одузимање допуњавањем до* 10 („црвена“ разлика) *је лакше кад год је умањилац већи од половине умањеника, а оно одузимањем од* 10 („плава“ разлика) *кад год је он мањи од те половине.*

Оба начина одузимања биће технички обрађени у пратећој радној свесци.

11. Множење. Пошто резултати производа два броја из таблице множења иду до 81, било би више него непрактично користити штапиће и ученике оптерећивати гломазним манипулативним активностима. Они су, по правилу, пре множења учили годину дана сабирање и одузимање (у оквиру блока до сто). Ако би радили са штапићима, онда би већ имали добро развијене визуелне представе везане за стандардне слагалице. За њих би, рецимо, следећа слагалица



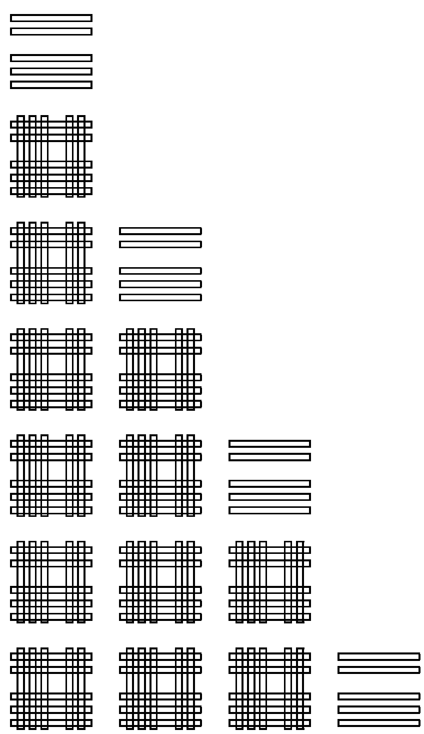
представљала три десетице и седам јединица, односно број 37, а те и такве слагалице подесније је представљати сликама него ли стварним гомилицама штапића.

Сликама штапића представићемо следеће производе

$$
\begin{aligned}
&n \cdot 5, \quad n = 1, \ldots, 9 \\
&n \cdot 6, \quad n = 1, \ldots, 6 \\
&n \cdot 7, \quad n = 1, \ldots, 7 \\
&n \cdot 8, \quad n = 1, \ldots, 8 \\
&n \cdot 9, \quad n = 1, \ldots, 9
\end{aligned}
$$

Идеја је да се формирају слике гомилица штапића, које ће, рецимо $6 \cdot 7$ представљати с једне стране као 6 уочљивих гомилица по 7 штапића, а истовремено, с друге стране као 4 гомилице које представљају десетицу и једне која ће представљати 2 јединице. Све десетице биће у мање више уобичајеном облику стандардне слагалице представљене. Бројеви 6, 7, 8 и 9 поред стандардних слагалица, такође ће бити представљени гомилицама које ће стајати уз $1 \cdot 6$, $1 \cdot 7$, $1 \cdot 8$ и $1 \cdot 9$. Слике које ће представљати $n \cdot m$, при текућем n и m бираним међу бројевима 5, 6, 7, 8 и 9 али у серији слика фиксним, груписаћемо једну иза или испод друге. Те серије, представљене у виду појединачних довољно великих листова, могле би служити као *зидне мапе* у разреду. Тако би и тежи случајеви множења дошли у оквир схематског учења.

Сад ћемо скицирати серије слика за сваки од горе наведених производа.



$1 \cdot 5$

$2 \cdot 5$

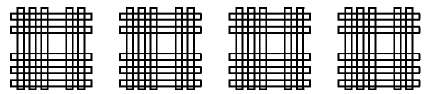
$3 \cdot 5$

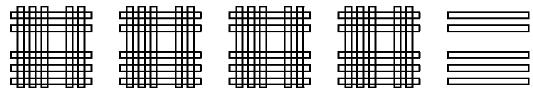
$4 \cdot 5$

$5 \cdot 5$

$6 \cdot 5$

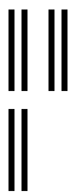
$7 \cdot 5$

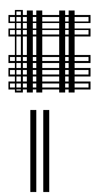
$8 \cdot 5$ 

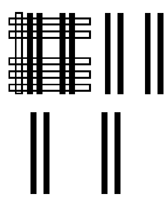
$9 \cdot 5$ 

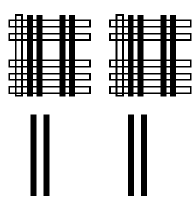
Резултат множења не би био назначен, већ се очекује да ученици, путем слике, брзо га сагледају.

Подешавајући шестицу, можемо направити слагалице за $n \cdot 6$ производе.

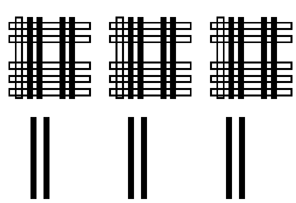
$1 \cdot 6$ 

$2 \cdot 6$ 

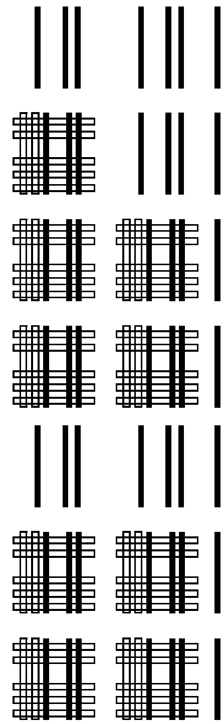
$3 \cdot 6$ 

$4 \cdot 6$ 

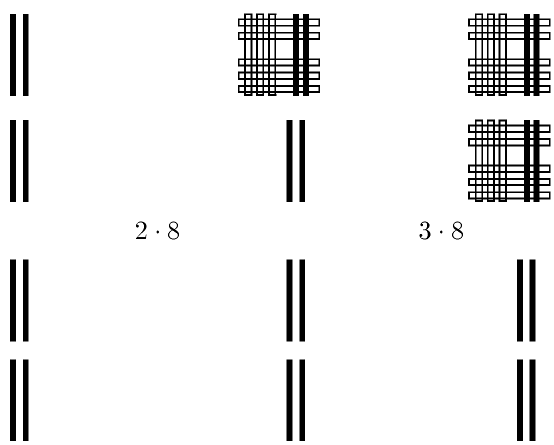
$5 \cdot 6$ Може се изоставити јер је $5 \cdot 6$ већ представљено у серији $n \cdot 5$

$6 \cdot 6$ 

Уочити да се слике за $1 \cdot 6$ и $2 \cdot 6$ стално понављају.



$1 \cdot 7$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 7$, $4 \cdot 7$, $6 \cdot 7$



$1 \cdot 8$ $\quad$ $2 \cdot 8$ $\quad$ $3 \cdot 8$ $\quad$ итд.

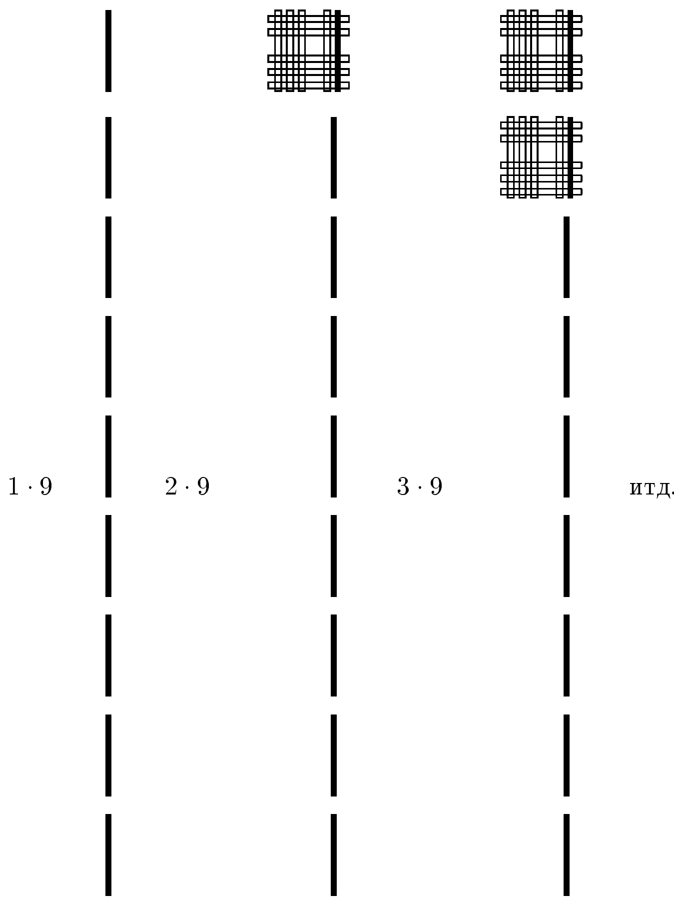
Код $n \cdot 8$, уочавамо ређање цифре јединица:

$$\underline{8},\quad 1\underline{6},\quad 2\underline{4},\quad 3\underline{2},\quad \boxed{4\underline{0}},\quad 4\underline{8},\quad 5\underline{6},\quad 6\underline{4},\quad 7\underline{2},$$

а десетица: 0, 1, 2, 3, $\boxed{4}$, 4, 5, 6, 7.

Код $n \cdot 9$ имамо 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, дакле

десетице:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
јединице:	9	8	7	6	5	4	3	2	1



ЛИТЕРАТУРА

[1] Arnhajm, R., *Vizuelno mišljenje — jedinstvo slike i pojma*, Univerzitet umetnosti u Beogradu, 1985.

[2] Cuisenaire, G. and Gattegno, C., *Numbers in Colors*, Mount Vernon, New York 1954.

[3] Skemp, R. R., *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, 1993.

[4] Struik, D. J. A., *Concise History of Mathematics*, Dover Publications, Inc., 1967.