Гордана Бојовић

ОСНА СИМЕТРИЧНОСТ НЕПРАВИЛНИХ МНОГОУГЛОВА

Ученици се са појмом осносиметричних фигура у равни срећу већ у млађим разредима основне школе (у трећем разреду), а затим и у петом разреду. Најзад, у седмом разреду ученици науче и важно својство правилних многоуглова да су они осно симетричне фигуре и да имају тачно онолико оса симетрије колики им је број страница. При томе се показује да важи:

• ако је број n страница правилног многоугла непаран, његове су осе симетрије све симетрале његових унутрашњих углова. Оне садрже темена одговарајућих углова и средине наспрамних страница многоугла и има их тачно n;

• ако је број n страница правилног многоугла паран, његове су осе симетрије све симетрале унутрашњих углова тог многоугла (има их $n/2$ и свака од њих садржи по два наспрамна темена) и све симетрале страница тог многоугла (има их $n/2$ и свака од њих садржи средишта двеју наспрамних страница многоугла), па је укупан број оса симетрије опет n.

Ученици имају одређено искуство и вештину цртања фигура у равни које јесу односно које нису осно симетричне. Вероватно их занима и одговор на следећа питања:

1. *Могу ли неправилни многоуглови бити осно симетрични?*

Одговор на ово питање они већ знају. На пример, правоугаоник јесте осно симетричан и када није квадрат. Тада он има тачно две осе симетрије. То су симетрале парова наспрамних страница правоугаоника.

Сл. 1

2. *Колико највише оса симетрије могу имати неправилни многоуглови?*

У чланку ћемо дати одговор на ово питање. Да бисмо ученицима приближили проблем, предлажемо да реше следећа два задатка.

Задатак 1. Нацртати по један пример осно симетричних неправилних конвексних многоуглова са: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6 страница.

Задатак 2. Колико највише оса симетрије може имати неправилан троугао?

Уз помоћ наставника ученици ће први задатак урадити без тешкоћа. Дајемо решење другог задатка.

(a) (b) (c)

Сл. 2

Слика показује троугао без оса симетрије (a), са једном осом симетрије (b), са три осе симетрије (c). Може ли троугао имати тачно две осе симетрије?

Приметимо да оса симетрије троугла мора пролазити кроз врх троугла и половити наспрамну страницу. Посматрајмо троугао са једном осом симетрије. Тачка A се пресликава у B, па је $AC = BC$. Ако би у том троуглу постојала друга оса симетрије, она би садржала теме A и половила страницу BC. При томе би се теме B пресликавало у теме C, па би било $AB = AC$. На основу тога закључујемо:

а) Ако је $AB \neq AC$, не постоји друга оса симетрије.

б) Ако је $AB = AC$, све три странице троугла су међусобно једнаке, троугао је једнакостраничан (дакле, правилан), па има три осе симетрије.

Дакле, троугао може имати једну или три осе симетрије. Неправилан троугао може имати највише једну осу симетрије; он је тада једнакокрак.

Задатак 3. Испитати колико највише оса симетрије може имати неправилан четвороугао.

(a) (b) (c) (d) (e)

Сл. 3

На слици 3 су четвороуглови без оса симетрије (a), са једном осом симетрије (b), са две осе симетрије (c) и (d), са четири осе симетрије (e). Да ли је могуће да четвороугао има тачно три осе симетрије?

Уочавамо да по две осе симетрије имају правоугаоник и ромб. Ако би постојала трећа оса симетрије правоугаоника, она би морала пролазити кроз два његова наспрамна темена — рецимо A и C. Тада би темена B и D била две осно симетричне тачке, па би било $AB = AD$ и $BC = CD$, што у правоугаонику (који није квадрат) није случај.

Трећа оса симетрије ромба би половила наспрамне странице, што би као последицу имало једнакост суседних углова, а ромб то својство нема (ако није квадрат).

Дакле, четвороугао не може имати тачно три осе симетрије. Четири осе симетрије има квадрат (правилан четвороугао).

Следеће слике показују неправилне и правилне многоуглове са истим бројем страница и њихове осе симетрије (у неправилним многоугловима једнаки углови су обележени истим бројем, а једнаке странице истим словом).

(a) (b) (a) (b)

Сл.4 Сл. 5

(a) (b) (a) (b)

Сл.6 Сл. 7

(a) (b) (a) (b)

Сл.8 Сл. 9

(a) (b)

Сл.10

Настављајући разматрање које смо извршили за троуглове и четвороуглове долазимо до табеле која повезује број страница n и највећи број оса симетрије s у неправилном многоуглу.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s	1	2	1	3	1	4	3	5	1	6

Уочавамо да је највећи број оса симетрије неправилног многоугла у овим примерима једнак највећем делиоцу броја његових страница, не рачунајући сам тај број. Ова чињеница важи и у општем случају, али њен доказ није једноставан, па се задовољавамо само формулацијом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Thomas W. Silgalis, *Symmetries of Irregular Polygons*, Mathematics Teacher, May 1992.

[2] С. Милић, М. Игњатовић, Б. Јевремовић, *Математика за 7. разред основне школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 1996.