

академик Григорије Давидович Глејзер

ГЕОМЕТРИЈА У ШКОЛИ

Проблеми и расуђивања

Недавно сам разговарао са својим суседом, окретним и радозналим учеником седмог разреда основне школе. Он је изјавио да је предмет који у школи најмање воли геометрија. На моје питање, шта раде у школи на часовима геометрије, уследио је одговор: „Доказујемо теореме“. Када сам га замолио да докаже неку од њих, он је безуспешно покушавао да изведе теорему о збиру углова у троуглу. Затим је прешао на лакшу теорему о једнакости углова налегних на основи једнакокраког троугла. Али и ту је доживео неуспех, пошто није могао да објасни да ли је троугао ABC подударан троуглу BCA . „Зар вам то није јасно? – рекао је и наставио – Па са леве и десне стране је исти троугао. Мени је и овако јасно, али наставница ипак тражи да се нешто доказује.“ Ово није шала. Питајте било ког ученика који је почео да учи геометрију и он ће рећи скоро исто. Опште је позната чињеница да већина ученика нема интерес за геометрију, а знање овог предмета се налази на недопустиво ниском нивоу. О томе говоре и наставници, и професори факултета, и родитељи, и сами ученици.

Наравно, можемо навести много узрока који доводе до овако јадних резултата. *Најважнији од њих је деформација водећих циљева наставе геометрије у школи.* Какви год да се циљеви декларишу у програму и многобројним методичким упутствима, школски уџбеник и традиција у настави коју је углавном формирала методологија и методика сталног уџбеника доводе је до представе да је основни циљ наставе геометрије развијање логичког мишљења код ученика. Штавише, тај циљ хипертрофише и претвара се у задатак недостижан на раном степену обучавања, задатак да се код ученика формира аксиоматски начин размишљања. Због тога, развој логичког мишљења постаје фактички не само основни, него у суштини једини циљ наставе, одузимајући тиме и ученицима и учитељима снагу и време.

И опет, по који пут већ за последњих 15–20 година поставља се питање нужности ревизије садржаја и методике наставе геометрије у школи. Таква нужност је сазрела. У низу публикација објављиване су свеобухватне концепције и конкретни предлози за ревизију садржаја геометријског образовања. Али, како ми се чини, ти предлози, без обзира на разумност и сврсисходност многих од њих, носе ипак локални карактер и усмерени су на усавршавање постојећег система наставе геометрије у школи. Њихова реализација може у најбољем случају да олакша усвајање појединих чињеница и савладавање конкретних метода.

Многобројна усавршавања такве врсте у прошлости нису довела до суштинског повећања квалитета геометријских знања ученика средње школе. По мом мишљењу, мора се приступити темељитој промени целог система геометријског образовања у школи.

Пре свега, приметимо да постоје суштинске разлике између захтева које о знању и умећу ученика предвиђају образовни стандарди (в. „Математика в школе“, 1993, бр. 4), и оног нивоа геометријског развоја који друштво очекује од савременог културног човека, који жели да постане инжењер, техничар или квалификовани радник. На овај друштвено потребни ниво знања, додатне захтеве налаже концепција непрекидног образовања. Није тајна да се геометријски развој може сматрати најважнијим фактором који омогућује спремност човека за перманентно образовање и самообразовање у најразличитијим областима људске делатности.

Ако се замислимо над суштином геометријског образовања, постаје јасно да су његови циљеви разноликији и садржајнији него што је то пуко савладавање одређеног конкретног обима знања, умећа и навика, које се одиграва на подлози декларисаног „над“ задатка курса – развоја логичког мишљења. У вези с тим желим да подвучем да геометрија нема и не може имати монопол у развоју логичког размишљања, она нема монопол над апстракцијом. Појмови „маса“, „сила“, „брзина“, „напон“ и други, представљају идеализацију физичке реалности приближно истог нивоа апстракције као и геометријски појмови „тачка“, „права“, „простор“ или као појмови из анализе „број“, „релација“, „функција“.

Друштвено потребне циљеве наставе геометрије можемо шватити као органску синтезу *општекултурних, научних* (каркатеристичних геометријских) и *примењених* циљева. И ако су научни и примењени циљеви наставе геометрије мање-више јасни, општекултурни су сведени само на развој логичког мишљења. Свакако, општекултурни циљеви наставе геометрије у првом реду подразумевају свестрани *развој мишљења* ученика. Не само вербално-логичког мишљења, већ у не мањој а можда и већој мери *очигледно-делатног* (практичног) и *очигледно-одразног*. У активном развоју ове последње две врсте мишљења мора се појавити специфичност предмета, који изучава особине тродимензионалног еуклидског простора који се у малом на Земљи не разликује много од геометрије реалног физичког простора и сасвим обезбеђује нашу земаљску егзистенцију и инжењерско-техничку активност. Из овога следи да у настави геометрије морамо код ученика упорно да тежимо развоју интуиције, просторног и логичког мишљења, и формирању њихових конструктивно-геометријских умећа и навика.

Дакле, друштвено потребни резултати наставе геометрије могу бити достигнути само ако не затворимо курс у оквире научних, чисто геометријских циљева, већ га изведемо на такав начин да у органској вези ефективно развија код ученика особине интелекта као што су

- геометријска интуиција (о одразу, конструисању, особинама, методама конструкције и доказивања)
- просторно мишљење (једно-, дво- и тродимензионалне еуклидске представе и просторне апстракције, њихова општост, покретност, стабилност, анализа и синтеза геометријских одраза, просторна имагинација)

- логичко мишљење (геометријски појмови и опште појмовне везе, владање правилима логичког извођења, разумевање и памћење конкретних доказа, владање разним методама геометрије)

- пособност за конструктивно-геометријске активности (шватање суштине скаларних величина, познавање начина увођења растојања у тродимензиони еуклидски простор, умеће одређивања, мерења и израчунавања дужина, површина и запремина геометријских фигура и њихових других елемената, умеће цртања геометријских фигура и извођења геометријских конструкција, моделирања и конструисања геометријских објеката)

- владање макар у минималном обиму **симболичким језиком геометрије** (разумевање геометријских симбола, умеће симболичког записивања решења и доказа).

Дакле, приликом ревизије система геометријског образовања у школи мора се имати у виду да је настава геометрије значајна са различитих гледишта: **логичког** – изучавање геометрије је извор и средство активног интелектуалног развоја човека и његових умних способности; **сазнајног** – помоћу геометрије дете спознаје свет који га окружује, његове просторне и количинске односе; **примењеног** – тродимензионална еуклидска геометрија је она основа која обезбеђује човекову спремност за савладавање како блиских области тако и многих професија, чини му доступним непрекидно образовање и самообразовање; **историјског** – на примерима из историје развоја геометрије прати се не само развој математике већ и људске културе у целини; **филозофског** – геометрија помаже да се осмисли свет у коме живимо, да се код човека формирају развојне научне представе о реалном физичком простору.

Јасно је да постојећи систем геометријског образовања, у ситуацији када се у школи уче два строго одвојена курса, планиметрија и стереометрија, оријентисани углавном на развој логичког мишљења у његовој крајње апстрактној, аксиоматској форми, не може да обезбеди набројане (и то не исцрпно!) циљеве наставе геометрије. Треба још додати да елементи геометрије у I–IV па и V–VI разреду данас стављају тежиште не толико на самосталне циљеве обуке, већ на припрему ученика за усвајање стабилних формализованих курсева у VII–XI разреду.

Какав треба да буде систем геометријског образовања у савременој школи да би могао да обезбеди потребни ниво геометријског знања ученика и друштвено значајне циљеве наставе геометрије у школи? Одговарајући на ово питање треба прво приметити да сам присталица изградње геометријског (као уосталом и сваког другог) образовања на принципу који се условно назива природна сврсисходност.

Суштина принципа је у томе да ученик у процесу учења геометрије и током свог геометријског развоја мора проћи у кондензованом облику основне етапе развоја геометријске науке, не прескачући при томе ниједну од њих. На тај начин биће обезбеђен природни процес развоја који не игнорише, већ узима у обзир многовековна историјска искуства човечанства и ослања се на њих. Прескакање појединих етапа, жеља да се на раним етапама развоја ученици навикну на савремени научни прилаз, има по мом мишљењу озбиљне сазнајне последице и

нарушавање природног развоја. То доводи до неприступачности курса, његовог формалног усвајања, губљења интереса за учење, отуђења многих ученика од геометрије. Тако се дешава са покушајима да се курс планиметрије од самог почетка гради на аксиоматској основи или да се геометријске трансформације уче на основу теорије пресликавања. Ово негативно искуство је добијено не само у домаћој, већ и у иностраној методици (сетимо се само искустава модернистичких курсева математике створених 60-тих и 70-тих година у Француској, Белгији и САД).

Које основне етапе се могу разликовати у развоју геометрије? Обично се издвајају **три** етапе: *догрчка*, *грчка* и *савремена*. Називе етапа схватамо условно јер оне нису везане за хронолошке границе, већ дефинисане методологијом геометрије, начинима доказивања и систематизације материјала који се примењују на свакој од етапа.

- У догрчкој етапи геометрија је била емпиријска наука. Многобројне геометријске чињенице које су миленијумима пре нашег времена познавали стари Египћани, Вавилонци, Индуси, Кинези и други народи, добијене су као резултат посматрања, искуства, експеримента. Практичне методе које су у тој етапи биле коришћене и данас фасцинирају својом оригиналношћу и оштроумношћу. Као пример можемо издвојити сликовити доказ Питагорине теореме или експериментално утврђивање формуле за површину сфере.

- Почетком VI века пре наше ере Грци су упознали геометрију Египћана и током неколико векова развили је до високог степена савршенства. У Старој Грчкој се одиграо постепени прелаз од практичне ка теоријској геометрији. У том периоду су откривене многобројне геометријске чињенице, али, што је најважније, разрађене су савршене логичке методе и сав геометријски материјал доведен у складан систем, који је описао Еуклид у својим „Елементима“. Методолошко савршенство „Елемената“ је тако велико да су они током два миленијума вршили огроман утицај на развој геометрије и били уџбеник геометрије практично истовремено у целом свету.

- Почетак савремене етапе развоја геометрије везан је за разраду *аксиоматске* методе. Са савременог гледишта, у основи геометрије лежи структура простора коју одређује неки систем аксиома. Савремена геометрија даје могућност да се разматрају модели не само физичког простора, већ простора било које структуре, чији се појмови и својства уклапају у геометријску схему.

У складу са овим основним етапама развоја геометрије, систем школског геометријског образовања треба да представља јединствени предмет, који се састоји из три или четири међусобно органски повезана курса.

Први курс – „Сликовита геометрија“. Он треба да се учи у основној школи. Његов основни циљ је обogaћење геометријских представа ученика, упознавање са максимално богатим скупом геометријских фигура (како равних, тако и просторних), усвајање основне геометријске терминологије, стицање умећа и навика у представљању (цртању) геометријских фигура.

Основне наставне делатности у овој етапи: посматрање и прављење (цртање) дводимензионалних и тродимензионалних геометријских фигура од папира, картона, пластелина; једноставни геометријски експерименти којима се утврђују

елементарна својства фигура (једнакост, разложива једнакост, једнака величина, симетричност); мерење; моделирање.

Други курс – „Практична геометрија“. Он се може учити у V–VI разреду. Његов главни циљ је да суштински обогати просторне представе ученика, да се они упознају са основним чињеницама планиметрије и стереометрије. У том курсу ученици практичним методама (искуством или огледом) утврђују основне геометријске чињенице (својства равних и просторних геометријских фигура), уче да их користе у раду и практичној делатности.

Основне наставне делатности на овој етапи: мерење, конструкција, представљање, оглед, моделирање и конструисање геометријских слика, израчунавање по формулама добијеним експерименталним путем, уз примену рачунске технике.

Поступно и опрезно овде се уводе дедуктивна закључивања, појединачна истинита расуђивања, која ученике припремају за усвајање систематског курса. На пример, у овој етапи ученици се помоћу плашта могу упознати са формулом површине геометријских тела, помоћу шупљих тела (преливањем воде или пресипањем песка из једног таквог тела у друго) ђаци могу да открију формуле запремина геометријских тела, како полиедралних, тако и ротационих; коришћењем цртежа и готових формула могу да налазе запремине комбинованих геометријских тела.

Прва и друга етапа школске геометрије могу бити спојене у јединствени курс сликовито-практичне геометрије, који методолошки одговара догрчком периоду развоја геометрије.

Трећи курс – „Систематски курс геометрије“. Он треба да се изучава у основној школи, да се наставља у средњој школи и да се или састоји из два дела – планиметрије и стереометрије, или да буде јединствени курс геометрије. Чак и код традиционалног, одвојеног излагања планиметрије и стереометрије, курс планиметрије треба да се гради на фузионистичким принципима тј. у њега се у органској вези са планиметријским материјалом морају уводити стереометријски појмови и чињенице. То је потребно тим пре што ће многи свршени ђаци после деветогодишње школе уместо у III разред ићи у професионалну школу, колеџ или средњу техничку школу. Без довољног броја тродимензионалних представа, без развијеног просторног мишљења незамисливо је усвајање многих општетехничких и специјалних дисциплина. По логичкој структури, тај курс замишљам као индуктивно-дедуктивни. Његов циљ је изучавање геометрије на основу систематизације и довођења до логичке елеганције скупа појмова и чињеница научених током прва два курса. Основни предмет изучавања у тој етапи морају бити инваријанте групе кретања и групе сличности тј. за основу курса се природно узимају геометријске трансформације, међу њима и вектори који представљају трансляторна кретања. На тај начин се завршава реструктурисање школског курса математике на функцијској основи, започето још почетком XX века.

Питање изградње овог курса на аксиоматској основи је дискутабилно. У општеобразовној школи (изузимајући школе и одељења са математичким усмерењем) овде треба размотрити два питања. Прво, да ли школски уџбеник треба принципијелно да буде изграђен на аксиоматској основи. Друго, треба ли ту аксиоматику у експлицитном облику доводити до свести ученика и од првих ко-

рака у геометрији формирати код њих аксиоматски начин мишљења. Позитиван одговор на оба питања дат је у уџбенику А.В. Погорелова. Такође сматрам да школски уџбеник треба да буде изграђен на аксиоматској основи. Принципијелну могућност изградње школског уџбеника на основу лако схватљиве аксиоматике показао је још Г. Бирхоф. Стварање оригиналних уџбеника на аксиоматској основи, као што су „Геометрија 6-8“ под редакцијом А.Н. Колмогорова или „Геометрија 6–10“ А.В. Погорелова доказало је да је могуће написати за ученике средње школе доступну, лако схватљиву аксиоматику еуклидске геометрије.

Међутим, *суштина аксиоматске методе састоји се у логичкој изградњи апстрактне теорије, при чему њени основни појмови немају садржај. Када им дајемо конкретан смисао, добијамо модел или интерпретацију те теорије.* На тај начин, суштина аксиоматске методе, њено срце је у могућности различитих интерпретација геометрије. Мислећем педагогу јасно је да је на савременом нивоу развоја методике немогуће постићи разумевање суштине аксиоматске изградње геометрије од стране свих ученика основне школе. О томе сведоче и многогодишња искуства у раду са поменутиим уџбеницима. Зато, иако сам присталица изградње школског курса геометрије на аксиоматској основи, сматрам да аксиоматика не треба да се у експлицитном облику доводи до знања свих ученика, она у уџбенику треба да остане „изван кадра“ и да буде детаљно разјашњена тек у књизи за наставника. Наставник је обавезан да јасно види сву логичку структуру курса и да уме сваку теорему из уџбеника да докаже са позивањем на аксиоме. Ученички докази треба да имају облик истинитих размишљања.

У реализацији ове идеје могу се применити различити прилази. На пример, у почетку се на основу убедљивих сликовитих констатација могу формулисати довољно јака тврђења, која ће омогућити да се брзо пређе на решавање великог броја садржајних задатака са ученицима. Примери таквих тврђења су теорема о збиру углова у троуглу или Питагорина теорема. Затим, после решавања многих геометријских задатака и накупљања већег броја геометријских чињеница у свести ученика, формираће се одређени ниво логичке културе, развиће се просторно мишљење, па се ученицима може открити логичка структура курса и саопштити да од сада у доказима имају право да користе само већ познате појмове и тврђења. На тај начин ученици ће се постепено и на природан начин навићи на методе дедуктивног мишљења.

Разматрање питања о аксиоматској методи, потпуности и непротивречности аксиоматике, минимизације броја аксиома, интерпретацији, излази изван оквира основног програма средње школе.

Четврти курс – мали по обиму, изграђен на аксиоматској основи, може бити уведен само у математичким одељењима у средњој школи, или факултативно, за ученике који испољавају повишени интерес за математику. Овде могу бити изложена питања историје развоја геометрије, њеног аксиоматског заснивања, проблеми потпуности и непротивречности аксиоматике, могућности различитих интерпретација еуклидске геометрије, настанак геометрије Лобачевског и друга питања која спадају у дедуктивну методу.