Милан В. Јовановић

О ЈЕДНАЧИНИ $x^y = y^x$

У овом чланку биће истакнути неки моменти који су у вези са добро познатим задатком ([1], стр. 341):

Наћи y' и y'' за функцију дефинисану једначином

$$x^y = y^x \qquad (x \neq y). \tag{1}$$

Рјешење је

$$y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}, \tag{2}$$

$$y'' = \frac{y^2[y(1-\ln x)^2 - 2(x-y)(1-\ln x)(1-\ln y) - x(1-\ln y)^2]}{x^4(1-\ln y)^3}. \tag{3}$$

Имајући у виду да је овај задатак сврстан међу оне који илуструју Теорему о имплицитној функцији, његово рјешавање је ствар технике. Међутим, да се дође до неке особине, на основу формула (2) и (3), већ је тежа ствар.

С друге стране видимо да у (1) нема битних ограничења за y ($x \neq y$ изоставља тривијалан случај, тј. идентично пресликавање), па је природно узети да је $\mathrm{Dom}(y) = \mathbf{R}_+$. Показаћемо да у том случају постоји само једна непрекидна функција која задовољава (1), али она није диференцијабилна.

Наведено ћемо изложити детаљније. Напоменимо само да довољни услови за постојање имплицитне функције задате релацијом $\rho = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x^y = y^x\,\}$ нису испуњени једино у тачки (e,e).

1. Одредимо сва непрекидна рјешења функционалне једначине

$$x^{y(x)} = [y(x)]^x, \qquad x > 0.$$

Искористићемо особине функције φ дате са $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Њене рестрикције $\varphi_1 = \varphi|_{(1,e]}$ и $\varphi_2 = \varphi|_{[e,+\infty)}$ су строго монотоне, па су на $(0,e]$ дефинисане φ_1^{-1} и φ_2^{-1}. Сада се види да за релацију ρ вриједи

$$(x,y) \in \rho \iff \varphi(y) = \varphi(x).$$

Даље, ρ је релација еквиваленције, а класе су јој највише двочлани скупови:

$$x \in (0,1] \cup \{e\} \implies E_x = \{x\}, \tag{4}$$

$$x \in (1,e) \cup (e,+\infty) \implies E_x = \{x, f(x)\}, \tag{5}$$

при чему је

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1^{-1}(\varphi_2(x)), & \text{за } x\geqslant e,\\ \varphi_2^{-1}(\varphi_1(x)), & \text{за } 1<x\leqslant e.\end{cases}\tag{6}$$

Како је f непрекидна функција, излази да су y_1 и y_2,

$$y_1(x)=x,\quad x>0 \qquad \text{и} \qquad y_2(x)=\begin{cases}x, & \text{за } 0<x\leqslant e,\\ f(x), & \text{за } x\geqslant e\end{cases}$$

рјешења.

Ако би постојало и треће рјешење y, имали бисмо у суштини двије могућности.

а) За неки $c\in(1,e)$ је $y(c)=f(c)$. Због (6) и (4) је $y(c)>e$, односно $y(1)=1$. Ако је y непрекидна, она у некој тачки из $(1,c)$ узима вриједност e, што не може због (5) и (6).

b) Случај да је $y(a)=a$ и $y(b)=f(b)$ за неке a, $b>e$ слично се одбацује.

2. Овдје ћемо установити монотонију функције f, користећи неке једноставне чињенице. f строго опада на $[e,+\infty)$, јер је композиција строго опадајуће φ_2 и строго растуће φ_1^{-1}. Због, на примјер, симетричности, f строго опада на $(1,+\infty)$.

3. Укажимо на сложеност употребе формуле (3) у доказу конвексности.

Из $x\ln y=y\ln x$ добија се $y(1-\ln x)^2-x(1-\ln y)^2=(x-y)(\ln x\ln y-1)$, тако да (3) постаје

$$x^4(1-\ln y)^3y''=y^2(x-y)(2\ln x+2\ln y-\ln x\ln y-3).$$

Нека је, на примјер, $x>e$. Тада је $1<y<e$, па је $y''\geqslant 0$ еквивалентно са $(\ln x-2)(\ln y-2)\leqslant 1$. Уз ознаке $u=\ln x$, $v=\ln y$, треба доказати

$$u>1,\quad 0<v<1,\quad \frac{e^u}{u}=\frac{e^v}{v}\implies u\geqslant 2+\frac{1}{v-2}.$$

Даље, $x\mapsto\dfrac{e^x}{x}$, $x\geqslant 1$, расте, тако да посљедња неједнакост слиједи (уз наведене услове) из $e^{2+\frac{1}{v-2}}\Big/2+\dfrac{1}{v-2}\leqslant\dfrac{e^u}{u}$, односно из

$$e^{2+\frac{1}{v-2}-v}\leqslant\frac{1}{v}\left(2+\frac{1}{v-2}\right),\qquad 0<v<1.\tag{7}$$

Функција $v \mapsto \ln \dfrac{2v-3}{v(v-2)} + \dfrac{v^2-4v+3}{v-2}$ непрекидно опада на $(0,1)$, анулира се за $v=1$, што повлачи неједнакост (7).

4. Диференцијабилност фукнције f је јасна за сваки $x \neq e$. Како је f конвексна на $(1,e]$ и на $[e,+\infty)$, то f има у e лијеви и десни извод. Они су једнаки, пошто за низове $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ вриједи $x_n < e < y_n$,

$$\lim \frac{f(e)-f(x_n)}{e-x_n} = \lim \frac{e-y_n}{e-x_n} = \lim \frac{-\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)} = -1$$

и $\dfrac{f(e)-f(y_n)}{e-y_n} = \dfrac{e-x_n}{e-y_n}$. Дакле, $f'(e) = -1$.

Напомена. У раду, велику помоћ ми је пружио др Владимир Јанковић, на чему сам му захвалан.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. П. Демидович, *Сборник задач и упраж. по матем. анализу*, Москва, 1990.

[2] S. Vrećica, *Konveksna analiza*, Beograd, 1993.