Никола Александров

ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ

Час обраде у II разреду Гимназије у Босилеграду

1. Уводни (припремни) део часа

1.1. Анализа домаћих задатака са претходног часа.

1.2. Истицање значајног: ученик на табли записује општи облик квадратне једначине и формулу њених решења, тј.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0), \tag{1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

1.3. Истицање циља: показаћемо да постоје још неке важне везе између решења x_1, x_2 и коефицијената a, b, c квадратне једначине. То су тзв. *Вијетове формуле* (François Viète, француски математичар).

2. Главни део часа

2.1. Стварање проблемске ситуације:

Задатак. Дате су квадратне једначине са одговарајућим решењима респективно (задаци су исписани на графофолији):

а) $x^2 - 2x - 8 = 0$; $x_1 = 4,\ x_2 = -2.$

б) $3x^2 - 4x + 1 = 0$; $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{3}.$

в) $6x^2 + 5x + 1 = 0$; $x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = -\dfrac{1}{3}.$

Упоредити збир и производ решења сваке једначине са њеним коефицијентима. Каква зависност постоји између решења и коефицијената сваке од тих квадратних једначина?

Ученици обављају одговарајућа израчунавања:

а) $x_1 + x_2 = 4 + (-2) = 2$; $x_1x_2 = 4 \cdot (-2) = -8.$

б) $x_1 + x_2 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$; $x_1x_2 = 1 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}.$

в) $x_1 + x_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{5}{6}$; $x_1x_2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{6}.$

Врше упоређивања и откривају да за све наведене једначине важе једнакости:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Јавља се проблем: да ли су те везе случајне или ваљане за било коју квадратну једначину? Како то установити?

На основу формуле (2), сабирањем односно множењем добијамо:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}, \\
x_1 x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} \\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.
\end{aligned}$$

На тај начин је доказано да за решења x_1, x_2 квадратне једначине (1) вреде формуле:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}} \qquad \text{(Вијетове формуле).} \tag{3}$$

2.2. Како ће гласити Вијетове формуле за квадратну једначину у нормалном облику?

Ако једначину $ax^2 + bx + c = 0$ поделимо са $a \neq 0$, добићемо еквивалентну једначину $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$, или ако ставимо да је $\dfrac{b}{a} = p$, $\dfrac{c}{a} = q$, имаћемо

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{(нормални облик квадратне једначине).} \tag{1'}$$

Вијетове формуле у том случају гласе:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.} \tag{3'}$$

Користећи те формуле, квадратна једначина (1′) може се записати на следећи начин:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0. \tag{4}$$

2.3. Сада ћемо, користећи се Вијетовим формулама, доказати да су x_1 и x_2 сва решења квадратне једначине (1).

Пошто се свака квадратна једначина може свести на нормални облик (коефицијент уз x^2 је 1), замењујући b/a и c/a редом са $-(x_1 + x_2)$ и $x_1 x_2$, добијамо једначину (4). Трансформишемо леву страну:

$$\begin{aligned}
x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \\
&= (x - x_1)(x - x_2).
\end{aligned}$$

Дакле, једначина постаје $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Тај производ је једнак нули само ако је бар један од фактора нула, тј. $x - x_1 = 0$ или $x - x_2 = 0$. Дакле, $x = x_1$ или $x = x_2$, односно x_1 и x_2 су решења и нема других решења осим њих.

3. Завршни део часа

3.1. У циљу констатације нивоа усвојености градива изложеног у главном делу часа, задајем ученицима следеће задатке (које решавају под надзором наставника):

Пример 1. Написати квадратну једначину чија су решења $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{5}{4}$.

Решење. $x^2 + px + q = 0$. $2 - \dfrac{5}{4} = -p$, $p = -\dfrac{3}{4}$. $2\left(-\dfrac{5}{4}\right) = q$, $q = -\dfrac{10}{4}$. Једначина је $x^2 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{10}{4} = 0$, односно $4x^2 - 3x - 10 = 0$.

Пример 2. У неким једноставним случајевима користећи се Вијетовим формулама може се квадратна једначина решити напамет (односно можемо погодити њена решења).

Решити једначине: а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 + x - 6 = 0$.

Решење. а) Пошто је $1 \cdot 3 = 3$ и $1 + 3 = 4$, на основу Вијетових формула $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

б) Пошто је $2(-3) = -6$ и $2 + (-3) = -1$, следи да су $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ решења.

Пример 3. Наћи два броја чији је збир 7, а производ 10.

Решење. $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 x_2 = 10$, па су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 - 7x + 10 = 0$. Решавајући једначину налазимо $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Пример 4. Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Одредити, а да не решавате једначину, збир квадрата њених решења.

Решење. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\frac{5}{3})^2 - 2(-\frac{2}{3}) = \frac{25}{9} + \frac{4}{3} = \frac{37}{9}$.

Пример 5. У једначини $x^2 - 8x + q = 0$ одредити q тако да је $x_1 = 3x_2$.

Решење. Из $x_1 + x_2 = 8$, $x_1x_2 = q$, $x_1 = 3x_2$ следи $3x_2 + x_2 = 8$, одакле $x_1 = 2$, $x_1 = 6$ и $q = 12$.

3.2. Домаћи задатак.

1) Саставити квадратну једначину чија су решења:

а) $x_1 = 1/3$, $x_2 = -2$; б) $7 + i$, $7 - i$.

2) Одредити m тако да број 2 буде решење квадратне једначине $x^2 - 5x + m = 0$:

а) применом Вијетових формула; б) без коришћења Вијетових формула.

3) Одредити квадратну једначину којој је збир решења $3/4$, а производ $-1/5$.

4) У једначини $x^2 - (m+1)x + m = 0$ одреди реалан број m тако да њена решења x_1, x_2 задовољавају једнакост $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

5) Решити квадратну једначину $2x^2 + 5x - 7 = 0$ без коришћења формуле решења.