

Виден Николић

**ОДНОС ВИСИНА, ОБИМА И ПОВРШИНА
СЛИЧНИХ ТРОУГЛОВА**

Час проширивања знања у VII разреду
ОШ „Љубица Радосављевић–Нада“, Зајечар

1. Увод

Подсетимо се ставова о сличности троуглова:

I СТАВ. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слични ако и само ако је један пар страница првог троугла пропорционалан пару одговарајућих страница другог троугла, а углови одређени овим страницама су једнаки:

$$BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1 \wedge \angle C = \angle C_1 \iff \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

Сл. 1

II СТАВ. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слични ако и само ако су два угла једног троугла једнаки са два одговарајућа угла другог троугла:

$$\angle A = \angle A_1 \wedge \angle B = \angle B_1 \iff \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

III СТАВ. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слични ако и само ако су им одговарајуће странице пропорционалне:

$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1 \iff \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

IV СТАВ. $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слични ако и само ако је један пар страница првог троугла пропорционалан пару одговарајућих страница другог троугла и ако су углови наспрам већих од ових страница једнаки:

$$BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1 \wedge \angle A = \angle A_1 \iff \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \quad (BC \geq CA).$$

2. Главни део часа

Горњи ставови имају значајне примене у геометрији. На овом часу ћемо упознати неке од примена ових ставова.

ПРИМЕР 1. Ако су два троугла слична, онда су њихове висине пропорционалне њима одговарајућим страницама.

Сл. 2

Доказ. Нека је $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Онда је

$$(1) \quad a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = k, \quad \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$

слика 2. Уочимо троуглове CDB и $C_1D_1B_1$. У њима је $\angle CDB = \angle C_1D_1B_1 = 90^\circ$ и, по претпоставци, $\angle B = \angle B_1$, па је на основу II става $\triangle CDB \sim \triangle C_1D_1B_1$. На основу ове сличности следи $CD : C_1D_1 = BC : B_1C_1$, тј.

$$(2) \quad h_c : h_{c_1} = a : a_1 = k,$$

а сада из релација (1) и (2) проистиче $h_c : h_{c_1} = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$.

ПРИМЕР 2. Ако су два троугла слична, онда су њихове површине пропорционалне квадратима њихових одговарајућих страница.

Доказ. Нека је $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Према претходном примеру је $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = h_c : h_{c_1}$. Како је

$$P = P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ch_c, \quad P_1 = P_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}c_1h_{c_1},$$

то је

$$P : P_1 = \frac{1}{2}ch_c : \frac{1}{2}c_1h_{c_1} = \frac{ch_c}{c_1h_{c_1}} = \frac{c}{c_1} \frac{h_c}{h_{c_1}} = \frac{c}{c_1} \frac{c}{c_1} = \frac{c^2}{c_1^2},$$

па је $P : P_1 = c^2 : c_1^2 = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2$.

ПРИМЕР 3. Ако су два троугла слична, онда су њихови обими пропорционални њиховим одговарајућим страницама.

Доказ. Претпоставимо да је $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; онда је $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = k$, тј.

$$a = ka_1, \quad b = kb_1, \quad c = kc_1.$$

Сабирајући добијамо

$$O = a + b + c = ka_1 + kb_1 + kc_1 = k(a_1 + b_1 + c_1) = kO_1,$$

тј. $O : O_1 = k = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$.

3. Самостални рад ученика

Даљи рад се одвија самостално у два нивоа према сложености задатака.

I група

1. Нека је дат правоугли троугао ABC са катетама $a = 10$ cm и $b = 24$ cm и обим њему сличног троугла $A_1B_1C_1$, $O_1 = 90$ cm. Одредити a_1 , b_1 и c_1 .

Решење. Из сличности троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ следи $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = O : O_1$. Странице троугла ABC су $a = 10$ cm, $b = 24$ cm и $c = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$ cm, а његов обим је $O = a + b + c = 10 + 24 + 26 = 60$ cm. Сада из једнакости $a : a_1 = O : O_1$, $b : b_1 = O : O_1$ и $c : c_1 = O : O_1$ редом добијамо $10 : a_1 = 60 : 90$, $a_1 = 15$ cm, затим $24 : b_1 = 60 : 90$, $b_1 = 36$ cm и, најзад, $26 : c_1 = 60 : 90$, $c_1 = 39$ cm.

За домаћи се задају следећи задаци:

2. Нека је дат правоугли $\triangle ABC$ са катетама $a = 12$ cm и $b = 9$ cm и обим њему сличног троугла $O_1 = 60$ cm. Одреди a_1 , b_1 и c_1 .

3. Обим једнакокраког троугла је 64 cm, а крак је за 8 cm дужи од основице. Израчунај обим сличног троугла чија је основица 12 cm.

II група

1. Нека су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ слични и нека је $a = 12$ cm, $a_1 = 8$ cm, $c_1 = 10$ cm и $h_c = 15$ cm. Одреди: c , h_{c_1} , $P_{\triangle ABC}$ и $P_{\triangle A_1B_1C_1}$.

Решење. Из $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ следи $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = h_c : h_{c_1}$. Из $a : a_1 = h_c : h_{c_1}$ добијамо $12 : 8 = 15 : h_{c_1}$, одакле $h_{c_1} = 10$ cm. Даље је $P_1 = \frac{1}{2}c_1h_{c_1} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ cm²; затим из $a^2 : a_1^2 = P : P_1^2$ следи $12^2 : 8^2 = P : 50$ и $P = 112,5$ cm².

За домаћи се задају следећи задаци:

2. Странице $\triangle ABC$ су $a = 10$ cm и $b = 12$ cm, а страница њему сличног троугла $A_1B_1C_1$ је $a_1 = 5$ cm и површина $P_1 = 20$ cm². Одреди b_1 и $P_{\triangle ABC}$.

3. Основици једнакокраког троугла ABC одговара висина $h_c = 16$ cm, а висина која одговара краку је $h_a = 12$ cm. Обим сличног троугла $A_1B_1C_1$ је $O_1 = 22$ cm. Израчунати странице троугла $A_1B_1C_1$.

Сл. 3

УПУТСТВО. Поћи од сличности троуглова ABE и CBD и одредити $a : c$, сл. 3. Користити затим сличност $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.